ΕΠΑΛ

Γεωμετρία Β΄ Λυκείου

Τράπεζα θεμάτων
Λύσεις

18-2-2023

130 ασκήσεις

Στέλιος Μιχαήλογλου

www.Askisopolis.gr

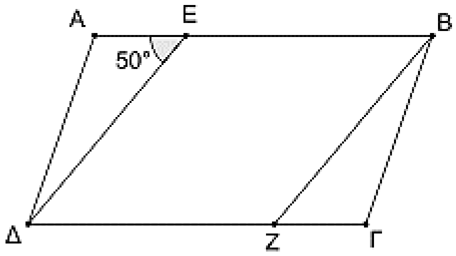
ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

2ο Θέμα

14501.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα, ώστε ΒΕ = ΔΖ και $A\hat{E}\Delta = 50^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΖΔΕ είναι παραλληλόγραμμο. **(Μονάδες 13)**

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $B\hat{E}\Delta$ και $B\hat{Z}\Delta$. **(Μονάδες 12)**



Λύση

α) Είναι ΒΕ//ΔΖ, γιατί οι απέναντι πλευρές ΑΒ, ΓΔ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι παράλληλες. Επιπλέον, από τα δεδομένα έχουμε ότι ΒΕ = ΔΖ. Το τετράπλευρο ΒΖΔΕ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του ΒΕ, ΔΖ είναι ίσες και παράλληλες.

β) Οι γωνίες $A\hat{E}\Delta, B\hat{E}\Delta$ είναι παραπληρωματικές, οπότε

$A\hat{E}\Delta + B\hat{E}\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + B\hat{E}\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow B\hat{E}\Delta = 130^\circ$.

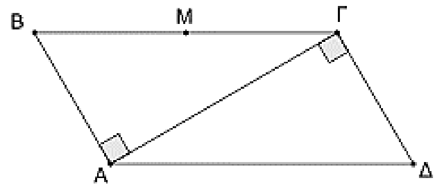
Είναι $B\hat{E}\Delta = B\hat{Z}\Delta = 130^\circ$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ΒΖΔΕ.

14503.Τα δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ του διπλανού σχήματος έχουν κοινή πλευρά την ΑΓ και ΑΒ = ΓΔ.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες. **(Μονάδες 7)**

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. **(Μονάδες 8)**

γ) Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ και ΑΔ = 8, να βρείτε το μήκος του ΒΜ. **(Μονάδες 9)**



Λύση

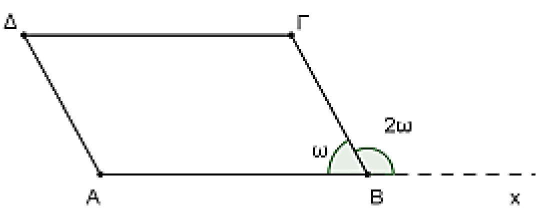
α) Οι ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες, γιατί είναι κάθετες στην ΑΓ στα σημεία της Α, Γ αντίστοιχα.

β) Από τα δεδομένα έχουμε ότι ΑΒ = ΓΔ και από το ερώτημα α έχουμε ότι ΑΒ//ΓΔ. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του ΑΒ, ΓΔ είναι ίσες και παράλληλες.

γ) Είναι ΒΓ = ΑΔ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Από τα δεδομένα έχουμε ότι ΑΔ = 8, άρα ΒΓ = 8. Αφού το Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, ισχύει ότι $BM = \frac{B\Gamma}{2} = 4$.

14504.Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο και Βx προέκταση της πλευράς του ΑΒ προς το Β.

α) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας συμπληρωμένη την ακόλουθη πρόταση: Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος παράλληλες είναι οι πλευρές …….. και απέναντι γωνίες είναι οι ……….. (Μονάδες 8)



β) Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος να δείξετε ότι $\hat{\omega} = 60^\circ$. **(Μονάδες 5)**

γ) Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών $\hat{A}, \hat{\Delta}$ και $\hat{\Gamma}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Να τεκμηριώσετε με επιχειρήματα την απάντησή σας. **(Μονάδες 12)**

Λύση

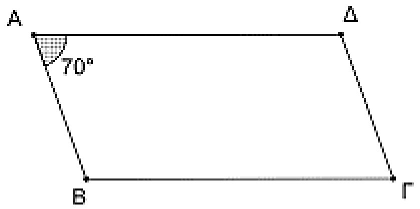
α) Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος παράλληλες είναι οι πλευρές **ΑΒ, ΔΓ** και οι πλευρές

ΑΔ, ΒΓ και απέναντι γωνίες είναι οι **Α,Γ και Δ,$\hat{\omega}$**.

β) Οι γωνίες ω και 2ω του σχήματος είναι παραπληρωματικές, οπότε
$\hat{\omega}+2\hat{\omega}=180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\omega}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega}=60^\circ$

γ) Αφού το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οι γωνίες $\hat{\omega}, A$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ με τέμνουσα την ΑΒ, οπότε
$\hat{\omega}+A=180^\circ \Leftrightarrow A=180^\circ-60^\circ=120^\circ$
Αφού το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή
$\Delta=\hat{\omega}=60^\circ$ και $\Gamma=A=120^\circ$.

14515. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $A=70^\circ$, ΑΒ = 5 και ΒΓ = 2ΑΒ.



α) Να αποδείξετε ότι $B=110^\circ$. **(Μονάδες 9)**

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες Γ, Δ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. **(Μονάδες 8)**

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 8)

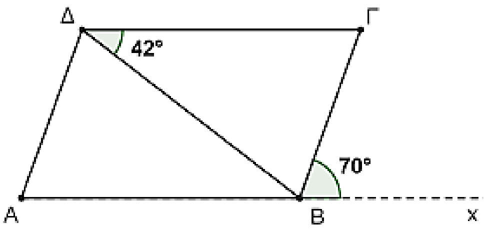
Λύση

α) Είναι ΑΔ//ΒΓ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου. Οι γωνίες A, B είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ με τέμνουσα την ΑΒ, άρα
$A+B=180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ+B=180^\circ \Leftrightarrow B=180^\circ-70^\circ=110^\circ$

β) Οι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι ίσες, άρα $\Gamma=A=70^\circ$ και $\Delta=B=110^\circ$.

γ) Από τα δεδομένα έχουμε ότι ΑΒ = 5 και ΒΓ = 2ΑΒ = 2 · 5 = 10. Οι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου είναι ίσες, οπότε ΓΔ = ΑΒ = 5 και ΑΔ = ΒΓ = 10. Η περίμετρος του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ = 5 + 10 + 5 + 10 = 30.

14516. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο και Bx η προέκταση της πλευράς του ΑΒ προς το Β.



α) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας συμπληρωμένη την ακόλουθη πρόταση: «Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος παράλληλες μεταξύ τους είναι οι πλευρές ……….. όπως και οι πλευρές ………, απέναντι δε γωνίες είναι οι ………. και οι ……….. ». **(Μονάδες 4)**

β) Λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου και τις γωνίες που σημειώνονται πάνω στο σχήμα, να υπολογίσετε με τη σειρά που ζητούνται:

i. Το μέτρο της γωνίας A. **(Μονάδες 8)**

ii. Το μέτρο της γωνίας Γ. **(Μονάδες 5)**

iii. Το μέτρο της γωνίας $\Delta B A$. **(Μονάδες 8)**

Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Λύση

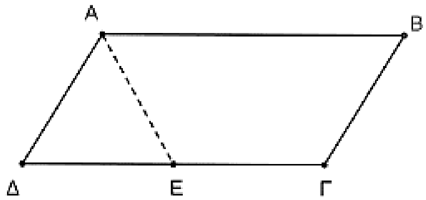
α) «Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος παράλληλες μεταξύ τους είναι οι πλευρές **ΑΒ, ΔΓ** όπως και οι πλευρές **ΑΔ, ΒΓ**, απέναντι γωνίες είναι οι **Α, Γ** και **ΑΔΓ, ΓΒΑ** ».

β) i. Η γωνία Α είναι ίση τη γωνία ΓΒx ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παράλληλων πλευρών ΑΔ και ΒΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ με τέμνουσα την ΑΒ, άρα $Α = 70^\circ$

ii. Η γωνία Γ είναι ίση με τη γωνία Α ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, άρα $Γ = 70^\circ$.

iii. Η γωνία ΔΒΑ είναι ίση με τη γωνία ΒΔΓ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παράλληλων πλευρών ΔΓ και ΑΒ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ με τέμνουσα την ΔΒ, άρα $ΔΒΑ = 42^\circ$.

14580.Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο με ΑΔ < ΑΒ. Η διχοτόμος της γωνίας του Α τέμνει την πλευρά ΔΓ σε σημείο Ε.



α) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες ΒΑΕ και ΑΕΔ είναι ίσες και στη συνέχεια να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 15)

β) Αν είναι ΑΒ = 2ΑΔ, να αποδείξετε ότι ΓΔ = 2ΔΕ. (Μονάδες 10)

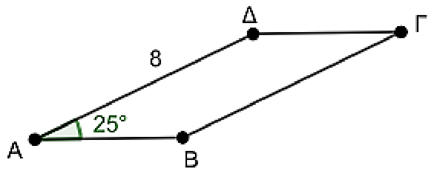
Λύση

α) Αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, τότε οι απέναντι πλευρές του ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες, οπότε $ΒΑΕ = ΑΕΔ\ (1)$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παράλληλων πλευρών ΑΒ και ΔΓ με τέμνουσα τη ΑΕ. Η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Α οπότε $ΔΑΕ = ΒΑΕ\ (2)$.

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $ΑΕΔ = ΔΑΕ$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με ΑΔ = ΔΕ (3).

β) Αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, τότε οι απέναντι πλευρές του ΑΒ και ΔΓ είναι ίσες, δηλαδή ΑΒ = ΔΓ. Από υπόθεση είναι ΑΒ = 2ΑΔ και αφού ΑΒ = ΔΓ, τότε θα είναι ΔΓ = 2ΑΔ.
Όμως ΑΔ = ΔΕ λόγω της σχέσης (3) του α) ερωτήματος, άρα ΔΓ = 2ΔΕ.

18199.Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $Α = 25^\circ$ και ΑΔ = 8.
Να υπολογίσετε:



α) Το μέτρο της γωνίας Γ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 10)

β) Το μήκος της πλευράς ΒΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 07)

γ) Τα μέτρα των υπόλοιπων γωνιών του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 08)

Λύση

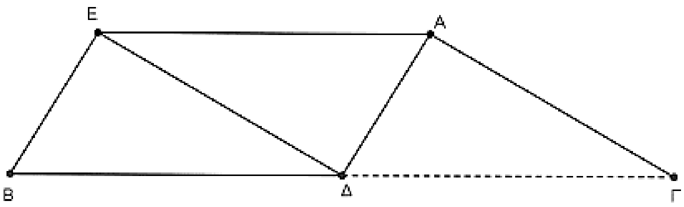
α) Οι απέναντι γωνίες κάθε παραλληλογράμμου είναι ίσες, άρα $Γ = Α = 25^\circ$.

β) Οι απέναντι πλευρές κάθε παραλληλογράμμου ανά δύο είναι ίσες. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ οι πλευρές ΒΓ και ΑΔ είναι απέναντι, οπότε προκύπτει ότι ΒΓ = ΑΔ = 8.

γ) Το άθροισμα των γωνιών κάθε παραλληλογράμμου είναι 360° , άρα

$$Α + Β + Γ + Δ = 360^\circ \Leftrightarrow 25^\circ + Β + 25^\circ + Β = 360^\circ \Leftrightarrow 2Β = 360^\circ - 50^\circ \Leftrightarrow 2Β = 310^\circ \Leftrightarrow Β = 155^\circ = Δ$$

19819.Στο σχήμα που ακολουθεί, το τετράπλευρο ΒΕΑΔ είναι παραλληλόγραμμο. Η παράλληλη από το Α προς την ΕΔ (δηλαδή η ΑΓ), τέμνει την προέκταση της ΒΔ προς το Δ σε σημείο Γ.



α) Να εξηγήσετε γιατί το τμήμα ΕΑ είναι παράλληλο στο τμήμα ΔΓ. (Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΑΓ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)
γ) Αν $ΑΓΔ = 30^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $ΑΕΔ$. (Μονάδες 5)

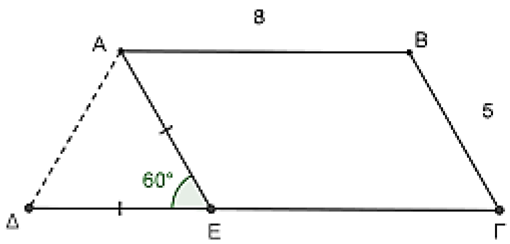
Λύση

α) Αφού το τετράπλευρο ΒΕΑΔ είναι παραλληλόγραμμο θα είναι ΕΑ // ΒΔ, ως απέναντι πλευρές του, οπότε η ΕΑ θα είναι παράλληλη στην ευθεία ΒΓ, άρα το τμήμα ΕΑ θα είναι παράλληλο στο τμήμα ΔΓ.

β) Αφού ΕΑ είναι παράλληλο στο τμήμα ΔΓ (από το α) ερώτημα) και ΑΓ είναι παράλληλη στην ΕΔ από τα δεδομένα, το τετράπλευρο ΔΕΑΓ θα είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του ΕΑ, ΔΓ και ΑΓ, ΕΔ ανά δύο παράλληλες.

γ) Η γωνία $ΑΓΔ = 30^\circ$ είναι ίση με τη γωνία $ΑΕΔ$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ΔΕΑΓ του β) ερωτήματος, οπότε $ΑΕΔ = 30^\circ$

19824.Στο σχήμα που ακολουθεί, το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο με ΒΓ = 5 και ΑΒ = 8. Στην προέκταση της ΓΕ προς το Ε θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΑΕ = ΕΔ και $ΑΕΔ = 60^\circ$.

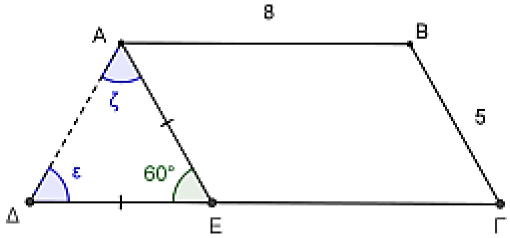


α) Να δείξετε ότι:
i. ΑΕ = 5 και ΕΓ = 8. (Μονάδες 8)
ii. ΔΕ = ΑΔ =5. (Μονάδες 9)
γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο Π του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 8)

Λύση

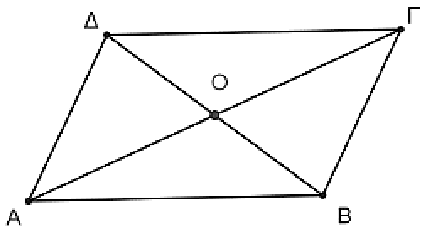
α) i. Από τα δεδομένα έχουμε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε θα έχει τις απέναντι πλευρές ίσες, δηλαδή είναι ΑΒ = ΕΓ και ΒΓ = ΑΕ. Οπότε, αφού είναι ΑΒ =8 και ΒΓ = 5, τότε θα είναι ΕΓ =8 και ΑΕ = 5.

ii. Αφού είναι ΑΕ = ΕΔ από τα δεδομένα, το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΑΔ και με γωνία κορυφής $ΑΕΔ = 60^\circ$ οπότε οι γωνίες της βάσης του θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{ε} = \hat{ζ}$.



Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΔ έχουμε:
$60^\circ + \hat{ε} + \hat{ζ} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{ε} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Leftrightarrow \hat{ε} = 60^\circ = \hat{ζ}$
Επομένως το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισόπλευρο αφού έχει όλες του τις γωνίες ίσες με 60^0 , οπότε ΑΕ = ΔΕ = ΑΔ=5.

β) Η περίμετρος Π του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι Π = ΑΒ + ΒΓ + ΔΓ +ΑΔ.
• Από τα δεδομένα έχουμε ότι ΑΒ = 8 και ΒΓ = 5.
• ΔΓ = ΔΕ + ΕΓ, με ΕΓ = 8 (από το α)i. ερώτημα) και ΔΕ = 5 (από το α)ii. ερώτημα), οπότε ΔΓ = 5 + 8 = 13.
• ΑΔ = 5 (από το α)ii. ερώτημα)
Άρα Π = 8 + 5 + 13 + 5 = 31.



19832.Το τετράπλευρο του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο με παράλληλες πλευρές τις ΑΒ, ΔΓ και ΑΔ, ΒΓ και διαγωνίους ΑΓ και ΔΒ, οι οποίες τέμνονται σε σημείο Ο. Αν επιπλέον είναι ΑΓ = 5, ΟΔ = 2,1 και ΑΒ = 4,2, να απαντήσετε στις ερωτήσεις που ακολουθούν, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΔΓ. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε

i. το μήκος της διαγωνίου ΔΒ,

ii. το μήκος του τμήματος ΟΓ. (Μονάδες 20)

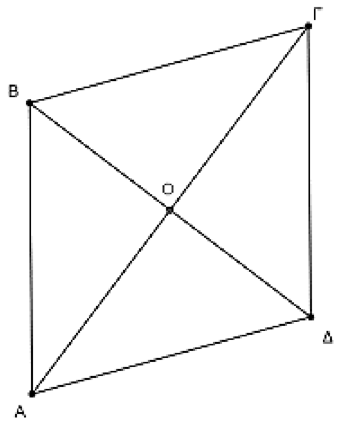
Λύση

α) Είναι ΔΓ = ΑΒ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ με ΑΒ = 4,2. Άρα ΔΓ = 4,2.

β) Οι διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομούνται και το σημείο τομής τους είναι το κοινό τους μέσο, δηλαδή στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ για τις διαγωνίους του ΒΔ και ΑΓ, που τέμνονται στο Ο, θα ισχύει ότι το Ο είναι το κοινό τους μέσο. Δηλαδή, θα ισχύει ότι: ΟΒ = ΟΔ και ΟΑ = ΟΓ.

i. Αφού είναι ΟΔ = ΟΒ και ΟΔ = 2,1 τότε ΔΒ = 2 · ΟΔ = 2· 2,1 = 4,2.

ii. Είναι ΑΓ = ΟΑ + ΟΓ με ΑΓ = 5 και ΟΑ = ΟΓ. Άρα 5 = 2· ΟΓ ή ΟΓ = 2,5.



19833.Το τετράπλευρο του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο με παράλληλες πλευρές τις ΑΒ, ΔΓ και ΑΔ, ΒΓ, το σημείο Ο είναι το κέντρο του, και ΑΔ = ΔΓ= 5. Να απαντήσετε στα ερωτήματα που ακολουθούν, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α) Να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και να υπολογίσετε την περίμετρό του. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\hat{ΑΟΔ}$. (Μονάδες 6)

γ) Αν είναι ΟΔ = 3 και ΑΓ = 8, να βρείτε τα μήκη των τμημάτων ΔΒ και ΟΓ. (Μονάδες 10)

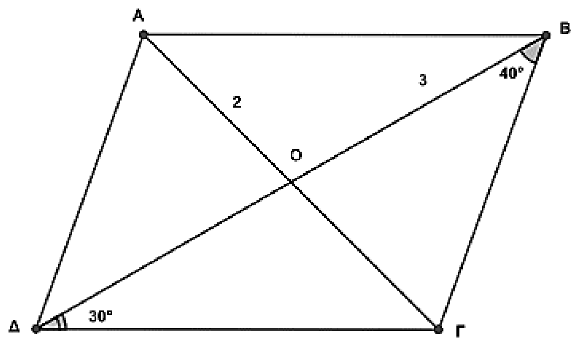
Λύση

α) Αφού το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και έχει δυο διαδοχικές πλευρές ίσες, τις ΑΔ και ΔΓ από τα δεδομένα, τότε θα είναι ρόμβος. Αφού το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος θα έχει όλες του τις πλευρές ίσες, δηλαδή ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ =5. Οπότε η περίμετρός του Π θα είναι Π = 4·ΑΒ= 4 · 5 = 20.

β) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, οπότε οι διαγώνιοί του θα τέμνονται κάθετα, άρα η γωνία $\hat{ΑΟΔ} = 90^\circ$.

γ) Γνωρίζουμε ότι, οι διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομούνται και το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το κοινό τους μέσο. Οπότε στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ για τις διαγωνίους του ΒΔ και ΑΓ, που τέμνονται στο Ο, θα ισχύει ότι το Ο είναι το κοινό τους μέσο.
Δηλαδή, θα ισχύει ότι: ΟΒ = ΟΔ και ΟΑ = ΟΓ.
Αφού είναι ΟΔ = ΟΒ και ΟΔ = 3 τότε ΔΒ = 2 · ΟΔ = 2· 3 = 6.
Είναι ΑΓ = ΟΑ + ΟΓ $\Leftrightarrow$ 8 = 2· ΟΓ $\Leftrightarrow$ ΟΓ = 4.

20946.Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος ισχύουν ΑΒ = ΓΔ και ΑΒ // ΓΔ. Παίρνοντας υπόψιν και τα υπόλοιπα δεδομένα όπως αυτά φαίνονται στο σχήμα, να υπολογίσετε:
α) Τα μήκη των τμημάτων ΟΓ, ΟΔ, όπου Ο είναι το σημείο τομής των ΑΓ, ΒΔ.
(Μονάδες 13)
β) Τα μέτρα των γωνιών Α, Β, Γ, Δ του τετραπλεύρου.
(Μονάδες 12)



Λύση

α) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει τις απέναντι πλευρές του ΑΒ και ΓΔ ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως οι διαγώνιες του ΑΓ και ΒΔ θα διχοτομούνται στο Ο.
Άρα ΟΓ = ΟΑ = 2 και ΟΔ = ΟΒ = 3.

β) Στο τρίγωνο ΒΓΔ ισχύει:

$\mathrm{B\Gamma\Delta} + \mathrm{\Gamma B\Delta} + \mathrm{\Gamma\Delta B} = 180^\circ \Leftrightarrow \mathrm{B\Gamma\Delta} + 40^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \mathrm{B\Gamma\Delta} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

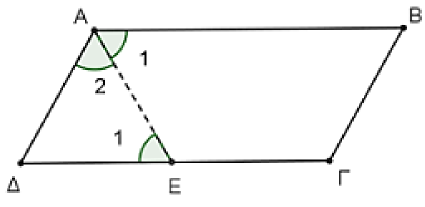
Όμως στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες είναι ίσες, άρα $\mathrm{A} = \Gamma = 110^\circ$.

Ακόμη $\mathrm{A} + \mathrm{B} = 180^\circ$ (ως εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ). Άρα $110^\circ + \mathrm{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \mathrm{B} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$, οπότε $\Delta = \mathrm{B} = 70^\circ$.

4ο Θέμα

14554.Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΔ< ΑΒ, τη διχοτόμο της γωνίας του Α η οποία τέμνει την πλευρά του ΔΓ σε σημείο Ε και τους ισχυρισμούς:
Ισχυρισμός 1: «Το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία Α, Δ και Ε είναι ισοσκελές».
Ισχυρισμός 2: « Το τμήμα ΔΕ είναι ίσο με την πλευρά ΒΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ».
α) Να χαρακτηρίσετε κάθε έναν από τους παραπάνω ισχυρισμούς ως αληθή ή ψευδή, αιτιολογώντας την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση. (Μονάδες 16)
β) Ποιο θα είναι το μέτρο των γωνιών του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ώστε το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία Α, Δ και Ε να είναι ισόπλευρο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

Λύση



α) Η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Α οπότε $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_2$ (1).
Αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, τότε οι απέναντι πλευρές του ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες, οπότε $\mathrm{A}_1 = \mathrm{E}_1$ (2) ως γωνίες εντός εναλλάξ των παράλληλων πλευρών ΑΒ και ΔΓ με τέμνουσα τη ΑΕ. Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\mathrm{E}_1 = \mathrm{A}_2$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με ΑΔ = ΔΕ (3).
Συνεπώς, ο ισχυρισμός 1 είναι αληθής.
Αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, τότε οι απέναντι πλευρές του ΑΔ και ΒΓ είναι ίσες, δηλαδή ΑΔ = ΒΓ (4). Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι ΔΕ = ΒΓ.
Συνεπώς, ο ισχυρισμός 2 είναι αληθής.

β) Αν το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο, τότε όλες οι γωνίες του θα είναι 60°, οπότε $\Delta = 60^\circ$.

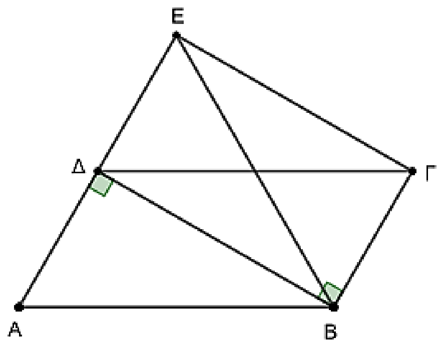
Όμως $\mathrm{B} = \Delta = 60^\circ$ ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.

Οι γωνίες A, B είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παράλληλων πλευρών ΑΔ και ΒΓ με τέμνουσα την ΑΒ, οπότε: $\mathrm{A} + \mathrm{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \mathrm{A} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Όμως $\mathrm{A} = \Gamma$ ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου, οπότε $\Gamma = 120^\circ$.

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ

4ο Θέμα

21394.Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος οι ΔΑ και ΒΓ είναι κάθετες στην ΔΒ και επίσης είναι ΑΔ = ΒΓ = 3.
α) Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.
(Μονάδες 9)
β) Προεκτείνουμε την ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ = 3.
Να αποδείξετε ότι:
i. Το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι ορθογώνιο.
(Μονάδες 9)
ii. Το τρίγωνο ΒΑΕ είναι ισοσκελές.
(Μονάδες 7)



Λύση

α) Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ οι πλευρές ΑΔ και ΒΓ είναι κάθετες στην ΒΔ, άρα είναι μεταξύ τους παράλληλες. Επειδή ΑΔ = ΒΓ, το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο αφού δυο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

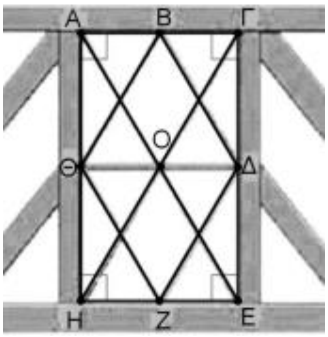
β) i)Οι ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες, αφού οι ΑΔ και ΒΓ είναι παράλληλες. Επίσης είναι ΔΕ = ΒΓ =3, οπότε το ΔΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο αφού δυο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες. Είναι $\hat{ΔΒΓ} = 90^\circ$, οπότε το ΔΒΓΕ είναι ορθογώνιο.

ii) Επειδή το ΔΒΓΕ είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιοι του είναι ίσες άρα ΒΕ = ΓΔ. Επίσης είναι ΒΑ = ΓΔ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Επομένως ΒΑ = ΒΕ, οπότε το ΒΑΕ είναι ισοσκελές.

ΡΟΜΒΟΣ

2ο Θέμα

14505.Στην εικόνα που ακολουθεί, υπάρχει το σχέδιο ενός παραθύρου με ΒΔ = ΔΖ = ΖΘ = ΘΒ και τις γωνίες $\hat{ΑΓΕ}, \hat{ΓΕΗ}, \hat{ΕΗΑ}, \hat{ΗΑΓ}$ ορθές.
α) Τι είδους τετράπλευρα είναι τα ΒΔΖΘ και ΑΓΕΗ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 12)
β) Ένας μαθητής λέει «τα τμήματα ΑΕ και ΓΗ είναι ίσα μεταξύ τους» και μια μαθήτρια, όταν το άκουσε, συμπλήρωσε «και τα ΑΟ, ΟΕ, ΓΟ και ΟΗ είναι ίσα μεταξύ τους». Συμφωνείτε με τους ισχυρισμούς που διατύπωσαν ο μαθητής και η μαθήτρια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 13)**

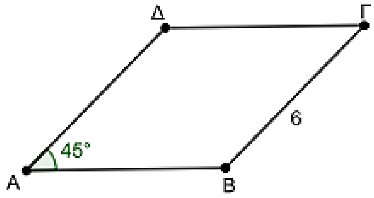


Λύση

α) Το τετράπλευρο ΒΔΖΘ έχει όλες τις πλευρές του ΒΔ, ΔΖ, ΖΘ και ΘΒ ίσες από τα δεδομένα, οπότε είναι ρόμβος. Το τετράπλευρο ΑΓΕΗ έχει τέσσερις γωνίες ορθές οπότε είναι ορθογώνιο.

β) Τα τμήματα ΑΕ και ΓΗ είναι διαγώνιοι του ορθογωνίου ΑΓΕΗ, οπότε θα είναι ίσες, δηλαδή ΑΕ = ΓΗ. Επειδή το τετράπλευρο ΑΓΕΗ ως ορθογώνιο είναι και παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιοι του ΑΕ και ΓΗ τεμνόμενες σε εσωτερικό τους σημείο Ο διχοτομούνται, δηλαδή είναι ΑΟ = ΟΕ = ΓΟ = ΟΗ. Συνεπώς, οι ισχυρισμοί των δυο μαθητών είναι αληθείς.

18200.Στον ρόμβο ΑΒΓΔ είναι $\mathrm{A} = 45^\circ$ και ΒΓ = 6.



α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας Γ του ρόμβου.
(Μονάδες 09)

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των υπόλοιπων πλευρών του ρόμβου.
(Μονάδες 09)

γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών Β και Δ είναι ίσο με τρεις ορθές. **(Μονάδες 07)**

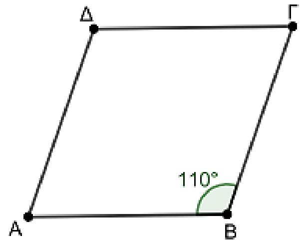
Λύση

α) Οι απέναντι γωνίες κάθε παραλληλογράμμου, άρα και κάθε ρόμβου ανά δύο είναι ίσες, άρα $\Gamma = \mathrm{A} = 45^\circ$.

β) Όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες. Εφόσον ΒΓ = 6 είναι ΑΒ = ΓΔ = ΑΔ = ΒΓ = 6.

γ) Το άθροισμα των γωνιών του ρόμβου είναι 360°, οπότε $\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma + \Delta = 360^\circ \Leftrightarrow$
$45^\circ + \mathrm{B} + 45^\circ + \Delta = 360^\circ \Leftrightarrow \mathrm{B} + \Delta = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ = 3 \cdot 90^\circ$.

18201.Στον ρόμβο ΑΒΓΔ είναι $\mathrm{B} = 110^\circ$.



α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας Δ του ρόμβου.
(Μονάδες 09)

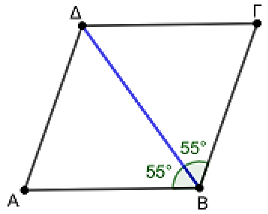
β) Να σχεδιάσετε τη διαγώνιο του ρόμβου από την κορυφή Δ.
(Μονάδες 06)

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\mathrm{AB}\Delta$.
(Μονάδες 10)

Λύση

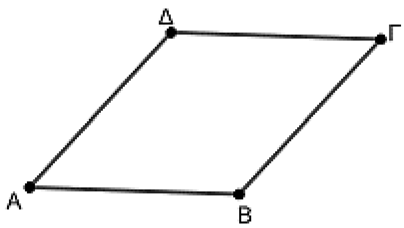
α) Οι απέναντι γωνίες κάθε παραλληλογράμμου, άρα και του ρόμβου είναι ίσες, άρα $\Delta = \mathrm{B} = 110^\circ$.

β) Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ, το οποίο είναι η διαγώνιος του ρόμβου ΑΒΓΔ από την κορυφή Δ.



γ) Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του. Επομένως η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β του ρόμβου. Άρα $\mathrm{AB}\Delta = \dfrac{110^\circ}{2} = 55^\circ$.

18202.Ο ρόμβος ΑΒΓΔ έχει περίμετρο 48.



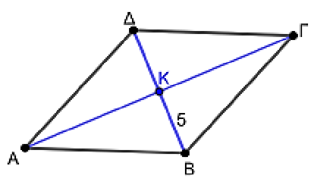
α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του ρόμβου.
(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε τις διαγωνίους του ρόμβου.
(Μονάδες 06)

γ) Αν Κ είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του ρόμβου και το ευθύγραμμο τμήμα ΒΚ έχει μήκος 5, να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου ΒΔ του ρόμβου. **(Μονάδες 09)**

Λύση

α) Όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες. Άρα το μήκος κάθε μιας πλευράς του ρόμβου ΑΒΓΔ είναι
48: 4 = 12. Επομένως ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ = 12.

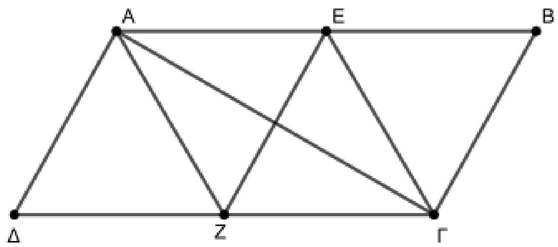


β) Σχεδιάζουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ που είναι οι διαγώνιοι του ρόμβου.

γ) Οι διαγώνιοι κάθε ρόμβου διχοτομούνται. Άρα το σημείο Κ είναι το μέσο και των δύο διαγωνίων, επομένως και της ΒΔ. Άρα $ΒΔ = 2 \cdot ΒΚ = 2 \cdot 5 = 10$.

20082.Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ η πλευρά ΑΒ είναι διπλάσια της πλευράς του ΒΓ. Αν Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα,
α) Να αποδείξετε ότι τα τετράπλευρα ΑΕΖΔ και ΒΕΖΓ είναι ρόμβοι. (Μονάδες 16)
β) Τι είδους τετράπλευρο είναι το ΑΕΓΖ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

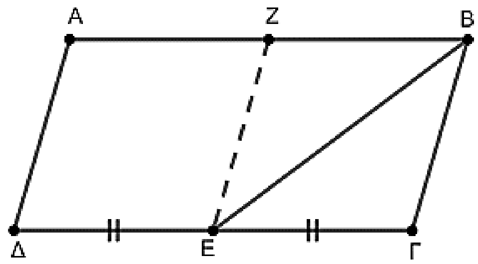
Λύση



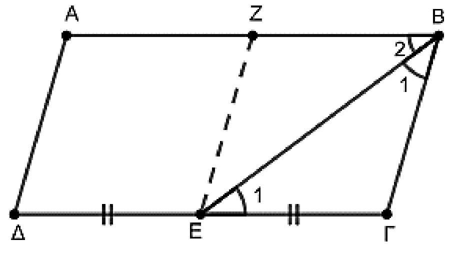
α) Τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι ίσα ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών τους αντίστοιχα, επομένως ΑΕ=ΕΒ=ΓΖ=ΖΔ.
Επίσης ΑΔ=ΒΓ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και επειδή
$ΑΒ = 2ΒΓ \Leftrightarrow ΒΓ = \frac{ΑΒ}{2}$ ισχύει τελικά ότι:
ΑΕ=ΕΒ=ΒΓ=ΓΖ=ΖΔ=ΑΔ (1).
Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ έχει τις απέναντι πλευρές του ΑΕ και ΖΔ ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον λόγω της σχέσης (1) δύο διαδοχικές πλευρές του ΑΕ και ΑΔ είναι ίσες, επομένως είναι ρόμβος. Ομοίως το τετράπλευρο ΒΕΖΓ έχει τις απέναντι πλευρές του ΒΕ και ΖΓ ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον λόγω της σχέσης (1) δύο διαδοχικές πλευρές του ΒΕ και ΒΓ είναι ίσες, επομένως είναι ρόμβος.

β) Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ έχει τις απέναντι πλευρές του ΑΕ και ΖΓ ίσες λόγω της σχέσης (1) και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

20087.Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ=2ΒΓ και Ε είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ.
α) Να αποδείξετε ότι το τμήμα ΒΕ διχοτομεί τη γωνία $\hat{Β}$ **του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 12)**
β) Αν το σημείο Ζ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ, τι είδους τετράπλευρο είναι το ΖΒΓΕ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)



Λύση

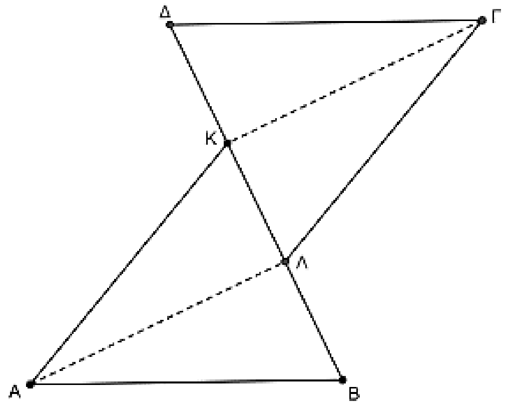


α) Οι πλευρές ΑΒ και ΓΔ είναι ίσες ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου. Επειδή το Ε είναι το μέσο της ΓΔ, έχουμε $ΓΕ = ΕΔ = \frac{ΓΔ}{2} = \frac{ΑΒ}{2} = ΒΓ$. Άρα το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΒΕ. Οπότε οι γωνίες της βάσης του θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{Β}_1 = \hat{Ε}_1$.
Όμως $\hat{Ε}_1 = \hat{Β}_2$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ όταν τέμνονται από τη ΒΕ. Συνεπώς $\hat{Β}_1 = \hat{Β}_2$, δηλαδή η ΒΕ διχοτομεί τη γωνία Β του παραλληλογράμμου.

β) Το σημείο Ζ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ, άρα $ΖΒ = \frac{ΑΒ}{2} = ΒΓ = ΓΕ$. Επιπλέον ΖΒ//ΕΓ ως τμήματα στις απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Άρα το τετράπλευρο ΖΒΓΕ έχει τις απέναντι πλευρές του ΖΒ και ΓΕ ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Όμως η διαγώνιος ΒΕ διχοτομεί τη γωνία του $\hat{Β}$, οπότε είναι τελικά ρόμβος.

4ο Θέμα

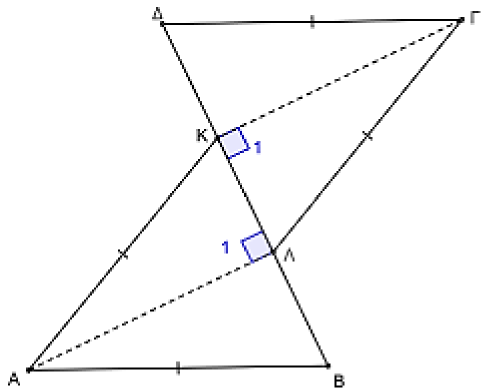
19839.Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ του σχήματος είναι ίσα και ισοσκελή με ΑΒ = ΑΚ και ΓΛ = ΓΔ αντίστοιχα.
Τα σημεία Λ και Κ είναι τα μέσα των ΒΚ και ΔΛ αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. ΑΚ = ΓΛ. (Μονάδες 8)
ii. ΑΚ = ΓΚ. (Μονάδες 4)
iii. Το τετράπλευρο ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)
β) Θα μπορούσε το παραλληλόγραμμο ΑΚΓΛ να είναι ρόμβος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



Λύση

α) i. Από τα δεδομένα έχουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ είναι ισοσκελή με ΑΒ = ΑΚ και ΓΛ = ΓΔ αντίστοιχα και ότι είναι ίσα, οπότε θα έχουν τις ίσες πλευρές τους ίσες, δηλαδή ΑΒ = ΑΚ = ΓΔ = ΓΛ, άρα ΑΚ = ΓΛ (1).

ii. Τα σημεία Λ και Κ είναι τα μέσα των πλευρών ΚΒ και ΔΛ των ισοσκελών τριγώνων ΑΚΒ και ΓΔΛ, οπότε τα ΑΛ και ΓΚ είναι ύψη στις πλευρές ΚΒ και ΔΛ αντίστοιχα. Άρα τα τρίγωνα ΑΛΚ και ΓΚΛ είναι ορθογώνια με $\hat{\Lambda}_1 = \hat{K}_1 = 90^\circ$,τα οποία έχουν την πλευρά ΚΛ κοινή και τις πλευρές τους ΑΚ, ΓΛ ίσες (από σχέση (1)). Επομένως τα τρίγωνα ΑΛΚ και ΓΚΛ είναι ίσα, γιατί έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία, οπότε θα έχουν και τις άλλες κάθετες πλευρές του ίσες, δηλαδή ΑΛ = ΓΚ (2).



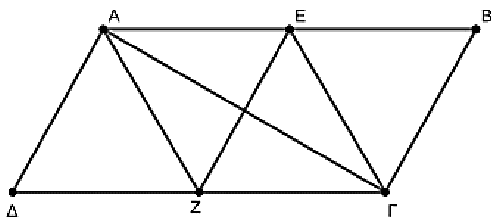
iii. Το τετράπλευρο ΑΚΓΛ θα είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του ΑΚ, ΓΛ και ΑΛ, ΓΚ ίσες (σχέσεις (1) και (2)).

β) Έστω ότι το παραλληλόγραμμο ΑΚΓΛ είναι ρόμβος, τότε όλες οι πλευρές του είναι ίσες, άρα και ΑΚ = ΑΛ. Όμως ΑΚ > ΑΛ, γιατί το ΑΚ είναι η υποτείνουσα και το ΑΛ είναι κάθετη πλευρά στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΛΚ. Επομένως, οι πλευρές ΑΚ και ΑΛ του παραλληλογράμμου ΑΚΓΛ δεν μπορεί να είναι ίσες, οπότε το παραλληλόγραμμο ΑΚΓΛ δεν μπορεί να είναι ρόμβος.

20088.Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ η πλευρά ΑΒ είναι διπλάσια της πλευράς του ΒΓ.
Αν Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα,
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Τα τετράπλευρα ΑΕΖΔ και ΒΕΖΓ είναι ρόμβοι. (Μονάδες 12)
ii. Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 07)
β) Πόσων μοιρών πρέπει να είναι η γωνία $\hat{B}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, ώστε το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ρόμβος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 06)

Λύση

α) i. Τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι ίσα ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών τους αντίστοιχα, επομένως ΑΕ=ΕΒ=ΓΖ=ΖΔ. Επίσης ΑΔ=ΒΓ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και επειδή



$AB = 2B\Gamma \Leftrightarrow B\Gamma = \frac{AB}{2}$ ισχύει τελικά ότι

ΑΕ=ΕΒ=ΒΓ=ΓΖ=ΖΔ=ΑΔ (1)

Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ έχει τις απέναντι πλευρές του ΑΕ και ΖΔ ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον λόγω της σχέσης (1) δύο διαδοχικές πλευρές του ΑΕ και ΑΔ είναι ίσες, επομένως είναι ρόμβος. Ομοίως το τετράπλευρο ΒΕΖΓ έχει τις απέναντι πλευρές του ΒΕ και ΖΓ ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον λόγω της σχέσης (1) δύο διαδοχικές πλευρές του ΒΕ και ΒΓ είναι ίσες, επομένως είναι ρόμβος.

ii. Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ έχει τις απέναντι πλευρές του ΑΕ και ΖΓ ίσες λόγω της σχέσης (1) και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Στο α) ii. ερώτημα το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. Αν επιπλέον είναι ρόμβος, τότε όλες οι πλευρές του είναι ίσες. Δηλαδή ΑΕ = ΕΓ = ΓΖ = ΖΑ. Όμως από την υπόθεση έχουμε ότι $AE = \frac{AB}{2} = EB = B\Gamma$, από το α)i. ερώτημα ότι ΒΓ = ΓΖ και ΓΖ = ΕΓ, δηλαδή το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισόπλευρο. Επομένως οι γωνιές του είναι όλες 60^o, άρα $\hat{B} = 60^\circ$.

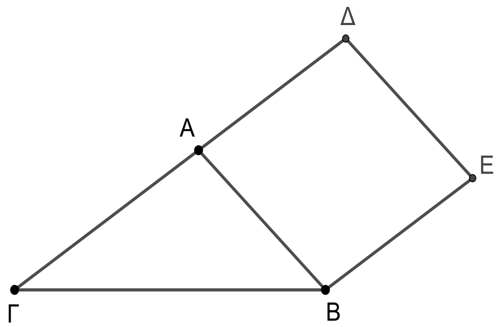
21404.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΓΑ κατά τμήμα ΑΔ = ΑΒ. Από τα Β και Δ φέρνουμε παράλληλες, αντίστοιχα προς τις ΑΔ και ΑΒ, οι οποίες τέμνονται στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 10)

β) Έστω ότι ΑΒ =4, ΑΓ = 5 και ΒΓ = 7. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ και ο ρόμβος ΑΒΕΔ έχουν ίσες περιμέτρους. (Μονάδες 10)

γ) Έστω ότι ΑΒ = γ, ΑΓ = β, ΒΓ = α και ότι το τρίγωνο ΑΒΓ και ο ρόμβος ΑΒΕΔ έχουν ίσες περιμέτρους. Να αποδείξετε ότι $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{3}$. (Μονάδες 5)



Λύση

α) Από τα δεδομένα, οι πλευρές ΒΕ και ΑΔ είναι παράλληλες και οι πλευρές ΔΕ και ΑΒ είναι παράλληλες. Άρα το τετράπλευρο ΑΒΕΔ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον το παραλληλόγραμμο ΑΒΕΔ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες αφού ΑΔ = ΑΒ, επομένως είναι ρόμβος.

β) Οι περίμετροι του τριγώνου ΑΒΓ και του ρόμβου ΑΒΕΔ είναι αντίστοιχα $AB + A\Gamma + B\Gamma = 4 + 5 + 7 = 16$ και $4AB = 16$, οπότε είναι ίσες.

γ) Οι περίμετροι του τριγώνου ΑΒΓ και του ρόμβου ΑΒΕΔ είναι αντίστοιχα $AB + A\Gamma + B\Gamma = \gamma + \beta + \alpha$ και $4AB = 4\gamma$ και επειδή είναι ίσες έχουμε

$$4\gamma = \alpha + \beta + \gamma \Leftrightarrow 3\gamma = \alpha + \beta \Leftrightarrow \gamma = \frac{\alpha+\beta}{3}$$

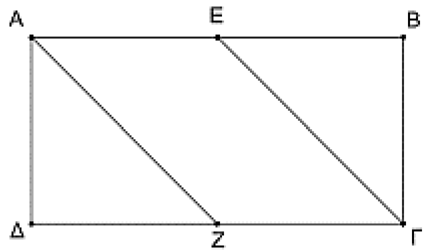
ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

2ο Θέμα

14502.Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 2ΑΔ και τα μέσα Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 12)
β) το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 13)

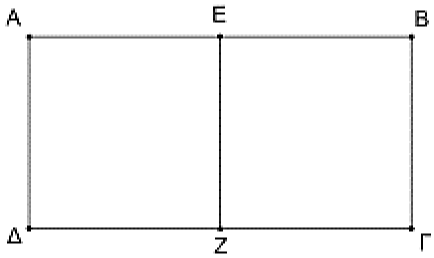
Λύση

α) Είναι ΑΒ//ΓΔ ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, άρα θα είναι ΑΕ//ΓΖ. Αφού τα σημεία Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ, είναι $ΑΕ = \frac{ΑΒ}{2}$ και $ΓΖ = \frac{ΓΔ}{2}$. Όμως ΑΒ = ΓΔ ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, άρα θα είναι ΑΕ = ΓΖ. Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του ΑΕ, ΓΖ είναι ίσες και παράλληλες.

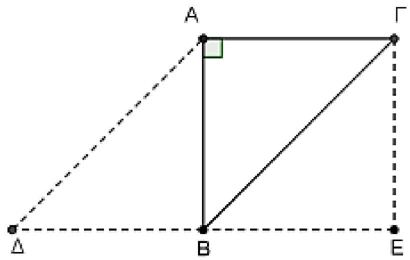


β) Είναι ΑΒ//ΓΔ ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, άρα θα είναι ΑΕ//ΔΖ. Αφού τα σημεία Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ, είναι $ΑΕ = \frac{ΑΒ}{2}$ και $ΔΖ = \frac{ΓΔ}{2}$. Όμως ΑΒ = ΓΔ ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, άρα θα είναι ΑΕ = ΔΖ. Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του ΑΕ, ΔΖ είναι ίσες και παράλληλες.

Η γωνία Α του παραλληλογράμμου ΑΕΖΔ είναι ορθή, γιατί το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. Από τα δεδομένα έχουμε ότι ΑΒ = 2ΑΔ, άρα $ΑΔ = \frac{ΑΒ}{2} = ΑΕ$.
Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι τετράγωνο, γιατί είναι παραλληλόγραμμο που έχει μια γωνία ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες



19831.Στο σχήμα που ακολουθεί, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $Α = 90^\circ$ και ΑΒ = ΑΓ = 12. Έστω ότι η παράλληλη από το σημείο Γ στην ΑΒ και η παράλληλη από το σημείο Β στην ΑΓ τέμνονται στο σημείο Ε.
α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι τετράγωνο και να υπολογίσετε την περίμετρό του. (Μονάδες 16)
β) Αν η παράλληλη από το Α στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την ευθεία ΒΕ (προς το μέρος του Β) σε σημείο Δ, να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)



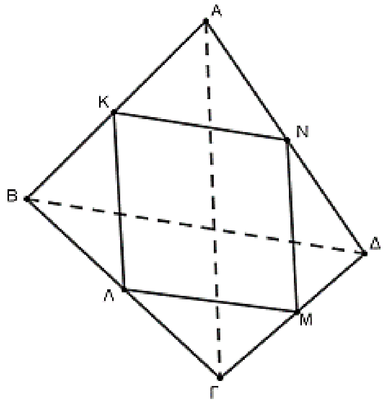
Λύση

α) Αφού είναι ΑΒ // ΓΕ και ΑΓ // ΒΕ, το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Το παραλληλόγραμμο ΑΓΕΒ έχει δυο διαδοχικές πλευρές ίσες, τις ΑΒ και ΑΓ από τα δεδομένα, και μια γωνία ορθή, την Α επίσης από τα δεδομένα, άρα είναι τετράγωνο.
Αφού το ΑΓΕΒ είναι τετράγωνο θα έχει όλες τις πλευρές του ίσες, δηλαδή ΑΓ = ΓΕ = ΕΒ = ΒΑ = 12
Επομένως η περίμετρος Π του ΑΓΕΒ θα είναι $Π = 4 \cdot ΑΒ = 4 \cdot 12 = 48$.

β) Έχουμε ότι ΑΓ // ΒΕ (από τα δεδομένα), άρα ΑΓ // ΔΒ. Επίσης είναι ΑΔ // ΒΓ από την υπόθεση του β) ερωτήματος, άρα το τετράπλευρο ΑΓΒΔ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

4ο Θέμα

21843.Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος Π του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ είναι Π=ΑΓ+ΒΔ .

(Μονάδες 8)

β) i. Αν το ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ είναι κάθετες μεταξύ τους.

(Μονάδες 8)

ii. Ποια επιπλέον ιδιότητα πρέπει να έχουν οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ ώστε το ΚΛΜΝ να είναι τετράγωνο;

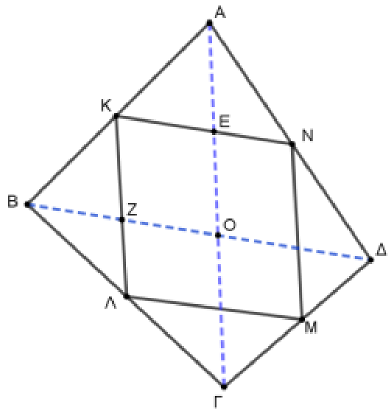
(Μονάδες 9)

Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΔ το ευθύγραμμο τμήμα ΚΝ ενώνει τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΔ, άρα ΚΝ//ΒΔ και $ΚΝ=\frac{ΒΔ}{2}$.Ομοίως στο τρίγωνο ΒΓΔ το ΛΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών του ΒΓ και ΓΔ, άρα ΛΜ//ΒΔ και $ΛΜ=\frac{ΒΔ}{2}$. Για τον ίδιο λόγο στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ θα είναι ΚΛ//ΑΓ και $ΚΛ=\frac{ΑΓ}{2}$ όπως και ΝΜ//ΑΓ και $ΜΝ=\frac{ΑΓ}{2}$.

Επομένως η περίμετρος του ΚΛΜΝ είναι

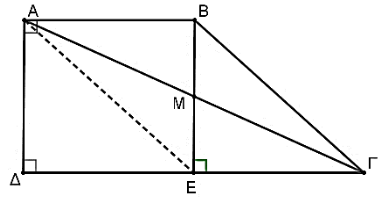
$$Π=ΚΝ+ΛΜ+ΚΛ+ΝΜ=\frac{ΒΔ}{2}+\frac{ΒΔ}{2}+\frac{ΑΓ}{2}+\frac{ΑΓ}{2}=ΒΔ+ΑΓ$$



β) i. Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ, Ε το σημείο τομής των ΑΓ και ΚΝ και Ζ το σημείο τομής των ΒΔ και ΚΛ. Αφού το ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο, τότε όλες οι γωνίες του είναι ορθές, άρα $ΛΚΝ=90^\circ$. Όμως ΚΝ//ΒΔ και ΚΛ//ΑΓ οπότε το τετράπλευρο ΚΕΟΖ έχοντας τις απέναντι πλευρές παράλληλες είναι παραλληλόγραμμο. Εφόσον $ΛΚΝ=90^\circ$ το ΚΕΟΖ είναι ορθογώνιο και επομένως όλες του οι γωνίες είναι ορθές, άρα $ΕΟΖ=90^\circ$, οπότε θα πρέπει το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να έχει κάθετες διαγωνίους.

ii. Εφόσον το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο τότε θα είναι ορθογώνιο και ρόμβος. Εφόσον το ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο, τότε όπως δείξαμε στο ερώτημα β)i το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει κάθετες διαγωνίους. Εφόσον το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος θα έχει ίσες πλευρές και άρα ΚΝ=ΚΛ. Όμως από το α) ερώτημα είναι $ΚΝ=\frac{ΒΔ}{2}$ και $ΚΛ=\frac{ΑΓ}{2}$,άρα ΒΔ=ΑΓ δηλαδή θα πρέπει το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να έχει και ίσες διαγωνίους. Τελικά για να είναι το ΚΛΜΝ τετράγωνο θα πρέπει το τετράπλευρο ΑΒΓΔ θα έχει ίσες και κάθετες διαγωνίους.

22563.Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΔΓ , $\hat{Α}=\hat{Δ}=90^\circ$, ΓΔ=2ΑΒ και $Β\hat{Γ}Δ=45^\circ$. Έστω ΒΕ κάθετη στη ΓΔ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι :



α) Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 9)

β) i. Το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

ii. Το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι τετράγωνο. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Είναι ΓΔ=2ΑΒ και ΔΕ=ΑΒ, άρα και ΓΕ=ΑΒ. Επειδή ΓΕ=//ΑΒ, το ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

β) i. Επειδή $\mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta = 45^{\circ}$ το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές, οπότε ΒΕ=ΕΓ.
ii. Στο ορθογώνιο ΑΒΕΔ είναι ΒΕ=ΕΔ, οπότε είναι τετράγωνο.

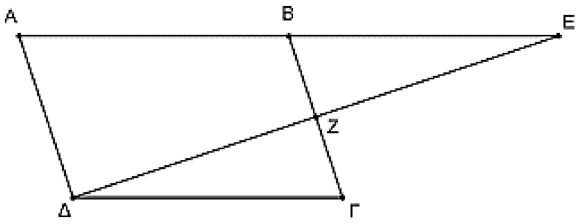
Εφαρμογές παραλληλογράμμου

2ο Θέμα

14560.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ε στην προέκταση της πλευράς ΑΒ προς το Β, ώστε ΑΒ = ΒΕ. Έστω Ζ το σημείο τομής των ΒΓ, ΔΕ.

α) Να αποδείξετε ότι το Ζ είναι το μέσο του ΔΕ. (Μονάδες 13)

β) Αν ΒΓ = 10, να βρείτε το μήκος του ΒΖ. (Μονάδες 12)



Λύση

α) Το Β είναι το μέσο της ΑΕ, αφού από τα δεδομένα έχουμε ότι ΑΒ = ΒΕ. Επιπλέον, η ΒΖ είναι παράλληλη στην ΑΔ, γιατί οι απέναντι πλευρές ΑΔ, ΒΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι παράλληλες. Στο τρίγωνο ΑΔΕ η ΒΖ διέρχεται από το μέσο Β της ΑΕ, είναι παράλληλη στην ΑΔ και τέμνει τη ΔΕ στο σημείο Ζ, άρα το Ζ είναι το μέσο του ΔΕ.

β) Ισχύει ΑΔ = ΒΓ, γιατί είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, άρα ΑΔ = 10. Εφόσον η ΒΖ ενώνει τα μέσα Β και Ζ των πλευρών ΑΕ και ΔΕ του τριγώνου ΑΔΕ, αντίστοιχα, το μήκος της ΒΖ είναι ίσο με το μισό του μήκους της πλευράς ΑΔ του τριγώνου ΑΔΕ. Άρα είναι $ΒΖ = \frac{ΑΔ}{2} = 5$.

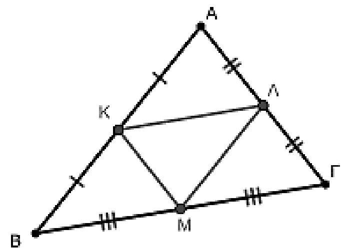
20840.Οι πλευρές ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ έχουν μήκη 6, 8 και 12 αντίστοιχα. Τα σημεία Κ, Λ και Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ με τη σειρά που δίνονται.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του παραλληλογράμμου ΚΛΓΜ. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Κ, Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, οπότε το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο στη ΒΓ και ίσο με $\frac{ΒΓ}{2}$.Άρα ΚΛ //ΜΓ και $ΚΛ = \frac{12}{2} = 6$.
Επιπλέον το σημείο Μ είναι το μέσο της ΒΓ, οπότε ΜΓ = 6. Το τετράπλευρο ΚΛΓΜ έχει τις δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



β) Οι απέναντι πλευρές ΚΜ και ΛΓ του παραλληλογράμμου ΚΛΓΜ είναι ίσες, οπότε
$ΚΜ = ΛΓ = \frac{ΑΓ}{2} = 4$.
Από α) ερώτημα ΚΛ = ΜΓ = 6. Οπότε η περίμετρος του παραλληλογράμμου ΚΛΓΜ είναι ίση με :
ΚΛ + ΛΓ + ΓΜ + ΜΚ = 6 + 4 + 6 + 4 =20.

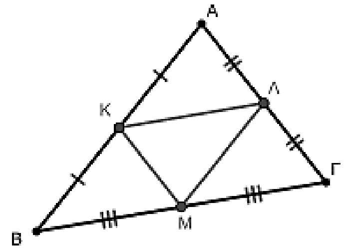
20843.Τρίγωνο ΑΒΓ έχει περίμετρο 28. Τα σημεία Κ,Λ και Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΚΛΜ. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Κ, Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, οπότε ΚΛ // ΒΓ και $ΚΛ=\frac{ΒΓ}{2}$ (1).



Επιπλέον το σημείο Μ είναι το μέσο της ΒΓ, οπότε $ΜΓ=\frac{ΒΓ}{2}$.

Το τετράπλευρο ΚΛΓΜ έχει τις πλευρές του ΚΛ και ΜΓ ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Κ και Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα, οπότε ΚΜ //ΑΓ και $ΚΜ=\frac{ΑΓ}{2}$ (2).

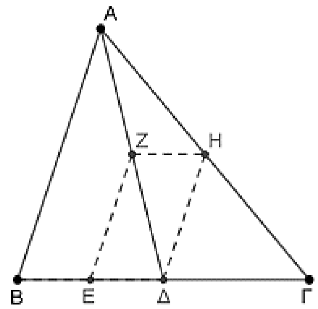
Αντίστοιχα, τα σημεία Λ και Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΒΓ, οπότε ΛΜ //ΑΒ και $ΛΜ=\frac{ΑΒ}{2}$ (3).

Η περίμετρος του τριγώνου ΚΛΜ είναι ίση με Π = ΚΛ + ΛΜ + ΜΚ και από τις σχέσεις (1), (2) και (3)

$$Π=\frac{ΒΓ}{2}+\frac{ΑΒ}{2}+\frac{ΑΓ}{2}=\frac{ΒΓ+ΑΒ+ΑΓ}{2}=\frac{28}{2}=14.$$

4ο Θέμα

19275. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Τα σημεία Ε, Ζ και Η είναι τα μέσα των ΒΔ, ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.



α) Να δικαιολογήστε γιατί:

i. $ΔΗ=//\frac{ΑΒ}{2}$. **(Μονάδες 07)**

ii. $ΖΕ=//\frac{ΑΒ}{2}$. **(Μονάδες 07)**

β) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΗΔΕ είναι παραλληλόγραμμο. **(Μονάδες 04)**

γ) Ποια πρέπει να είναι η σχέση των ΑΒ και ΒΓ, ώστε το ΖΗΔΕ να είναι ρόμβος; **(Μονάδες 07)**

Λύση

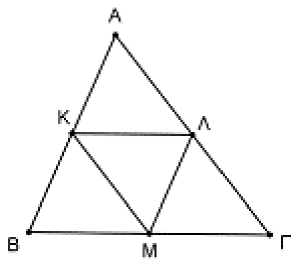
α) i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το Δ είναι μέσο της ΒΓ και το Η είναι μέσο της ΑΓ, οπότε το τμήμα ΔΗ θα είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά ΔΓ και ίσο με το μισό της, δηλαδή: $ΔΗ=//\frac{ΑΒ}{2}$ (1).

ii. Στο τρίγωνο ΑΒΔ, το Ζ είναι μέσο της ΑΔ και το Ε είναι μέσο της ΒΔ, οπότε το τμήμα ΖΕ θα είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά ΑΒ και ίσο με το μισό της, δηλαδή: $ΖΕ=//\frac{ΑΒ}{2}$ (2).

β) Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι ΔΗ = // ΖΕ, επομένως το τετράπλευρο ΖΗΔΕ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες.

γ) Για να είναι το παραλληλόγραμμο ΖΗΔΕ ρόμβος, αρκεί δύο διαδοχικές του πλευρές να είναι ίσες, έστω ΖΗ = ΖΕ. Στο τρίγωνο ΑΔΓ, το Ζ είναι μέσο της ΑΔ και το Η μέσο της ΑΓ, οπότε το τμήμα ΖΗ θα είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά ΔΓ και ίσο με το μισό της, δηλαδή: $ΖΗ=//\frac{ΔΓ}{2}$.

Είναι $ΖΗ=ΖΕ\Leftrightarrow\frac{ΔΓ}{2}=\frac{ΑΒ}{2}\Leftrightarrow ΔΓ=ΑΒ$. Όμως $ΔΓ=\frac{ΒΓ}{2}$, οπότε $\frac{ΒΓ}{2}=ΑΒ\Leftrightarrow ΒΓ=2ΑΒ$.



19840.Στο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος που ακολουθεί τα Κ, Λ και Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.
α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την επιλογή σας:
i. Αν είναι ΚΛ = 6, τότε το ΒΓ είναι ίσο με:
Α: 6 Β: 12 Γ: 3 Δ: 16 (Μονάδες 8)
ii. Αν είναι ΚΛ + ΛΜ + ΚΜ= 12, τότε το άθροισμα ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ είναι ίσο με:
Α: 12 Β: 6 Γ: 24 Δ: 16 (Μονάδες 9)
β) Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση ως αληθή ή ψευδή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Πρόταση :
«Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, τότε το τετράπλευρο ΚΛΜΒ είναι ρόμβος». (Μονάδες 8)

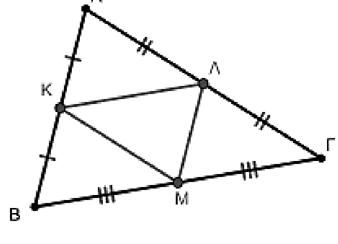
Λύση

α) i. Σωστή απάντηση είναι το Β. Αφού τα Κ, Λ είναι μέσα πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, το ΚΛ ως τμήμα που ενώνει τα μέσα τους είναι $ΚΛ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΒΓ = 2ΚΛ = 12$.

ii. Σωστή απάντηση είναι το Γ.
- Τα Κ, Λ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε το ΚΛ ως τμήμα που ενώνει τα μέσα τους είναι $ΚΛ = \frac{ΒΓ}{2}$.
- Τα Λ, Μ είναι μέσα των πλευρών ΑΓ, ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε το ΛΜ ως τμήμα που ενώνει τα μέσα τους είναι $ΛΜ = \frac{ΑΒ}{2}$.
- Τα Κ, Μ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε το ΚΜ ως τμήμα που ενώνει τα μέσα τους είναι $ΚΜ = \frac{ΑΓ}{2}$.

Οπότε $ΚΛ + ΛΜ + ΚΜ = \frac{ΒΓ}{2} + \frac{ΑΒ}{2} + \frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ}{2} \Leftrightarrow 12 = \frac{ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ}{2} \Leftrightarrow$
$ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ = 24$.

β) Αφού τα Κ, Λ είναι μέσα πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, το ΚΛ ως τμήμα που ενώνει τα μέσα τους θα είναι παράλληλο προς την πλευρά ΒΓ και ίσο με το μισό της, δηλαδή $ΚΛ = \frac{ΒΓ}{2}$ και αφού το Μ είναι μέσο του ΒΓ, τότε $ΚΛ = \frac{2ΒΜ}{2} = ΒΜ$.
Επειδή είναι ΚΛ παράλληλο την πλευρά ΒΓ, το ΚΛ θα είναι παράλληλο και στο τμήμα ΒΜ, δηλαδή ΚΛ // ΒΜ. Αφού είναι ΚΛ // ΒΜ και ΚΛ = ΒΜ , τότε το τετράπλευρο ΚΛΜΒ θα είναι παραλληλόγραμμο. Από υπόθεση το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, οπότε ΑΒ= ΑΓ = ΒΓ και ΚΒ = ΒΜ ως μισά των ίσων πλευρών του ΑΒ και ΒΓ και Κ, Μ τα αντίστοιχα μέσα τους.
Επομένως, το τετράπλευρο ΚΛΜΒ είναι ρόμβος γιατί είναι παραλληλόγραμμο που έχει δυο διαδοχικές πλευρές ίσες. Συνεπώς, η Πρόταση είναι αληθής.



20844.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Κ,Λ και Μ των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.
α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)
β) Να γράψετε όλα τα παραλληλόγραμμα που σχηματίζονται με κορυφές 4 από τα σημεία Α, Β, Γ, Κ, Λ και Μ. (Μονάδες 9)
γ) Αν επιπλέον δίνεται ότι το τετράπλευρο ΑΚΜΛ είναι ρόμβος να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του.
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

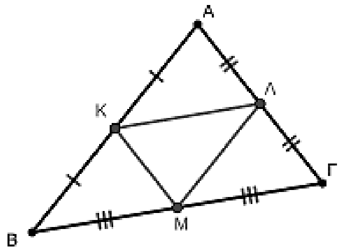
Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Κ, Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, οπότε το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο στη ΒΓ και ίσο με $\frac{ΒΓ}{2}$. Επιπλέον το σημείο Μ είναι το μέσο της ΒΓ, οπότε

$ΜΓ = \frac{ΒΓ}{2}$.

β) Από το ερώτημα α) έχουμε ότι το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι παραλληλόγραμμο. Σχηματίζονται επίσης τα παραλληλόγραμμα ΑΚΜΛ και ΚΛΜΒ.

γ) Αν το τετράπλευρο ΑΚΜΛ είναι ρόμβος τότε όλες οι πλευρές του είναι ίσες.
Δηλαδή ΑΚ = ΚΜ = ΛΜ = ΑΛ. Ισχύει ότι $ΑΚ = \frac{ΑΒ}{2}$ και $ΑΛ = \frac{ΑΓ}{2}$ και επειδή ΑΚ = ΑΛ θα έχουμε ΑΒ = ΑΓ , οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.



20846.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Κ,Λ και Μ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.
α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΚΛΜΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)
β) Να γράψετε όλα τα παραλληλόγραμμα που σχηματίζονται με κορυφές τέσσερα από τα σημεία Α, Β, Γ, Κ, Λ και Μ. (Μονάδες 9)
γ) Αν επιπλέον δίνεται ότι το τετράπλευρο ΑΚΜΛ είναι ορθογώνιο να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

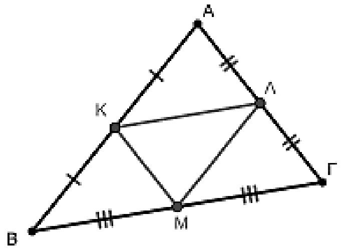
Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Κ, Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, οπότε το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο στη ΒΓ και ίσο με $\frac{ΒΓ}{2}$. Επιπλέον το σημείο Μ είναι το μέσο της ΒΓ, οπότε

$ΜΒ = \frac{ΒΓ}{2}$. Άρα ΚΛ//ΜΒ και ΚΛ = ΜΒ. Το τετράπλευρο ΚΛΜΒ έχει τις δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Από το ερώτημα α) έχουμε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΒ είναι παραλληλόγραμμο. Σχηματίζονται επίσης τα παραλληλόγραμμα ΑΚΜΛ και ΚΛΓΜ.

γ) Αν το τετράπλευρο ΑΚΜΛ είναι ορθογώνιο, τότε όλες οι γωνίες του είναι ορθές. Οπότε $Α = 90^{\circ}$ και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.



20848.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Κ,Λ και Μ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.
α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΑΚΜΛ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)
β) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ:
i. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΜΛ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)
ii. Ποιο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας $Α$ του τριγώνου ΑΒΓ ώστε το τετράπλευρο ΑΚΜΛ να είναι τετράγωνο; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

Λύση

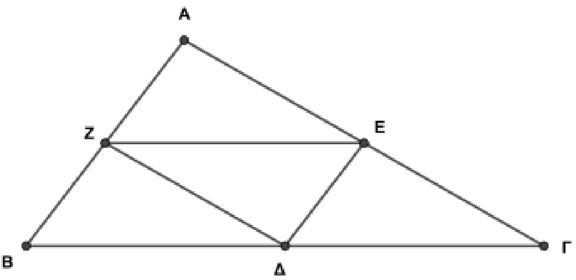
α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Μ, Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα, οπότε το τμήμα ΜΛ είναι παράλληλο στη ΑΒ και ίσο με $\frac{AB}{2}$. Επιπλέον επειδή το σημείο Κ είναι το μέσο της ΑΒ, οπότε $AK = \frac{AB}{2}$. Άρα ΜΛ//ΑΚ και ΜΛ = ΑΚ. Το τετράπλευρο ΑΚΜΛ έχει τις δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, τότε :

i. $M\Lambda = \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2} = A\Lambda$ αφού το Λ είναι το μέσο της ΑΓ. Το παραλληλόγραμμο ΑΚΜΛ έχει δυο διαδοχικές πλευρές του ίσες , άρα είναι ρόμβος.

ii. Όπως αποδείξαμε στο βi) το τετράπλευρο ΑΚΜΛ είναι ρόμβος. Για να είναι το ΑΚΜΛ τετράγωνο, θα πρέπει να είναι και ορθογώνιο, δηλαδή να έχει τις γωνίες του ορθές. Άρα θέλουμε να ισχύει $A = 90^\circ$. Οπότε για να είναι το τετράπλευρο ΑΚΜΛ τετράγωνο πρέπει το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $A = 90^\circ$ και ΑΒ = ΑΓ.

20948.Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος τα Δ, Ε, Ζ είναι μέσα των πλευρών του.
Αν ΒΓ = 10, ΔΖ = 4 και ΔΕ = 2,5:
α) να αποδείξετε ότι ΖΕ // ΒΓ. **(Μονάδες 8)**
β) να υπολογίσετε το μήκος της ΖΕ. **(Μονάδες 7)**
γ) να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών ΑΒ, ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ. **(Μονάδες 10)**



Λύση

α) Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά. Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Ζ, Ε είναι μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Επομένως ΖΕ // ΒΓ.

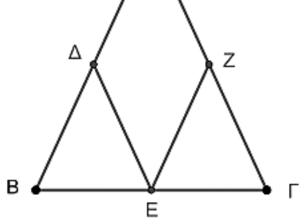
β) Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς. Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Ζ, Ε είναι μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα.

Επομένως $ZE = \frac{B\Gamma}{2} = 5$.

γ) Για τον ίδιο λόγο που αναφέρθηκε στο ερώτημα β) είναι:

$\Delta E = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow B = 2\Delta E = 5$ και $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow A\Gamma = 2\Delta Z = 8$

21402.Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και έστω Δ, Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΕΖ είναι ρόμβος. **(Μονάδες 10)**
β) Αν $B = 75^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του ρόμβου ΑΔΕΖ. **(Μονάδες 10)**
γ) Ποιο θα πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας B ώστε το τετράπλευρο ΑΔΕΖ να είναι τετράγωνο; Τι τρίγωνο είναι τότε το ΑΒΓ; **(Μονάδες 5)**



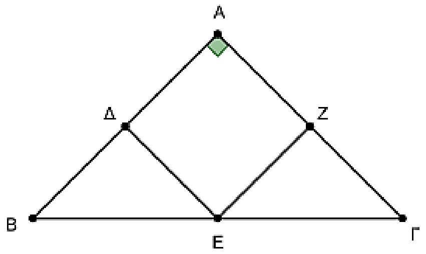
Λύση

α) Το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ οπότε είναι παράλληλο προς την πλευρά ΑΓ και ίσο με το μισό της. Επομένως οι ΔΕ και ΑΖ είναι παράλληλες και $ΔΕ = \frac{ΑΓ}{2} = ΑΖ$. Επομένως το τετράπλευρο ΑΔΕΖ είναι παραλληλόγραμμο αφού δυο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

Επίσης είναι $ΑΔ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΑΓ}{2} = ΑΖ$, επομένως το τετράπλευρο ΑΔΕΖ είναι ρόμβος αφού έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

β) Αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ είναι $Β = Γ = 75^\circ$, οπότε $Α = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.

Οι απέναντι γωνίες του ρόμβου ανά δυο είναι ίσες, άρα $ΔΕΖ = Α = 30^\circ$ και $ΑΔΕ = ΑΖΕ$. Όμως $ΑΔΕ + ΑΖΕ = 360^\circ - ΔΕΖ - Α = 300^\circ$, άρα $ΑΔΕ = ΑΖΕ = 150^\circ$.



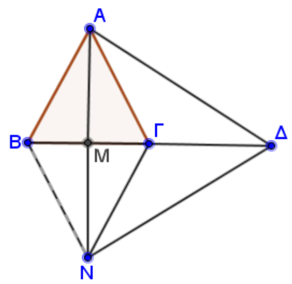
γ) Το ΑΔΕΖ είναι ρόμβος, οπότε θα είναι τετράγωνο, αν επιπλέον είναι ορθογώνιο. Τότε $Α = 90^\circ$, οπότε $Β = Γ = \frac{180^\circ - Α}{2} = 45^\circ$. Στην περίπτωση αυτή, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.

21844. Δίνεται οξυγώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και το ύψος του ΑΜ. Προεκτείνουμε το ΑΜ κατά τμήμα $ΜΝ = ΑΜ$. και τη ΒΓ κατά τμήμα $ΓΔ = ΒΓ$. Να αποδείξετε ότι:

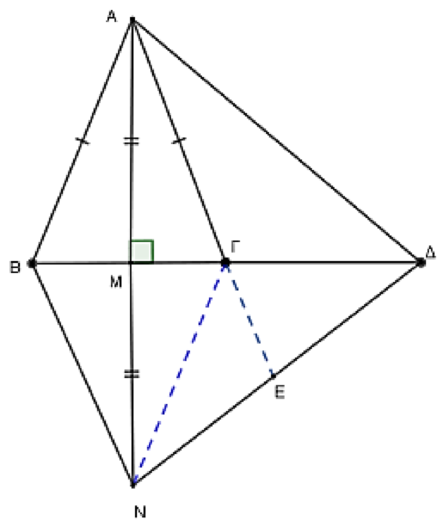
α) Το τετράπλευρο ΑΒΝΓ είναι ρόμβος. **(Μονάδες 9)**

β) Το τρίγωνο ΑΔΝ είναι ισοσκελές. **(Μονάδες 9)**

γ) Η προέκταση της ΑΓ τέμνει τη ΔΝ στο μέσον της. **(Μονάδες 7)**



Λύση



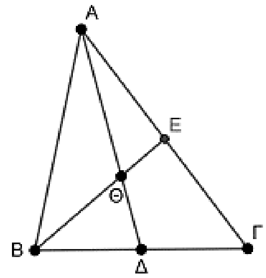
α) Το ΑΜ είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και διάμεσος.
Οι ΑΝ, ΒΓ είναι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΒΝΓ και διχοτομούνται κάθετα, άρα είναι ρόμβος.

β) Στο τρίγωνο ΑΔΝ η ΔΜ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

γ) Εφόσον το τετράπλευρο ΑΒΝΓ είναι ρόμβος, η ευθεία ΑΓ είναι παράλληλη με τη ΒΝ. Έτσι στο τρίγωνο ΔΒΝ έχουμε από το μέσον Γ της πλευράς του ΒΔ ευθεία παράλληλη με την πλευρά του ΒΝ, άρα η ΓΕ διέρχεται από το μέσον της πλευράς του ΔΝ.

Βαρύκεντρο τριγώνου

2ο Θέμα



19514.Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ και το Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ. Δίνονται τα μήκη ΑΔ = 12 και ΘΕ = 3.
α) Να αποδείξετε ότι ΘΔ = 4.

(Μονάδες 10)

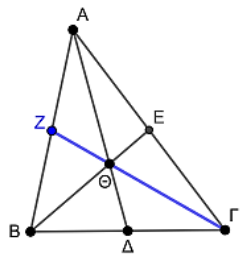
β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΒΕ και ΒΘ.

(Μονάδες 08)

γ) Να σχεδιάσετε τη διάμεσο ΓΖ του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 07)

Λύση



α) Το Θ είναι το σημείο τομής των διαμέσων ΑΔ και ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ, δηλαδή είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου. Το βαρύκεντρο απέχει από κάθε κορυφή του τριγώνου απόσταση ίση τα 2/3 της αντίστοιχης διαμέσου. Επομένως $A\Theta = \frac{2}{3}A\Delta$ και $\Theta\Delta = \frac{1}{3}A\Delta = \frac{1}{3}\cdot 12 = 4$.

β) Είναι $\Theta E = \frac{1}{3}BE \Leftrightarrow BE = 3\Theta E = 3\cdot 3 = 9$

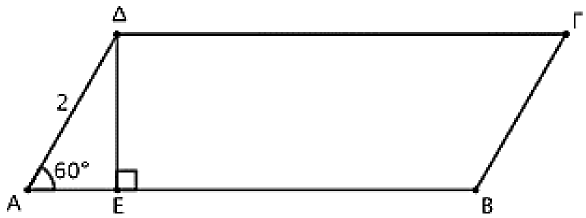
Επίσης ΒΘ = ΒΕ - ΘΕ= 9 − 3 = 6.

γ) Η διάμεσος ΓΖ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή Γ με το μέσο Ζ της ΑΒ και διέρχεται από το βαρύκεντρο Θ του τριγώνου.

ΔΙΑΜΕΣΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ – ΘΕΩΡΗΜΑ 30°

2^o Θέμα

18304.Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος με ΑΔ = 2 και $A = 60^\circ$.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες B, Γ και $A\Delta\Gamma$. **(Μονάδες 12)**

β) Αν ΔΕ είναι ύψος του παραλληλογράμμου, τότε:

i. Να υπολογίσετε τη γωνία $A\Delta E$. (Μονάδες 8)

ii. Να αποδείξετε ότι ΑΕ = 1. **(Μονάδες 5)**

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες είναι ίσες. Επομένως: $A = \Gamma = 60^\circ$ και $B = A\Delta\Gamma$.

Επίσης, σε κάθε παραλληλόγραμμο δύο διαδοχικές γωνίες είναι παραπληρωματικές, οπότε:

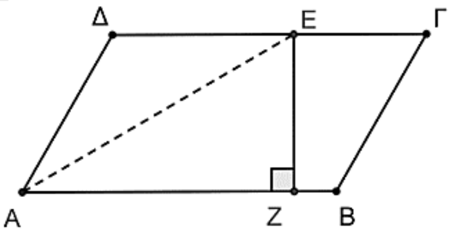
$A + A\Delta\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow A\Delta\Gamma = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ = B$

β) i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΔ είναι: $A + A\Delta E = 90^\circ \Leftrightarrow A\Delta E = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, οπότε στο τρίγωνο ΑΔΕ η απέναντι κάθετη πλευρά ΑΕ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΑΔ, δηλαδή:

$AE = \frac{A\Delta}{2} = 1$.

14552.Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο με ΑΔ < ΑΒ και $A = 60^\circ$.

Η ΑΕ είναι η διχοτόμος της γωνίας A η οποία τέμνει την πλευρά ΔΓ σε σημείο Ε και η ΕΖ είναι η κάθετη από το Ε στην πλευρά ΑΒ. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε κάθε καθένα από τα ακόλουθα δύο ερωτήματα, αιτιολογώντας την επιλογή σας.



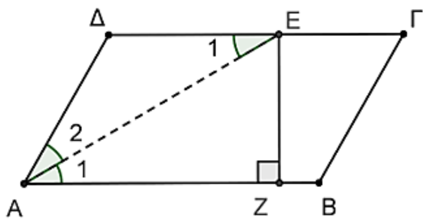
α) Αν είναι ΑΔ = 6, τότε το ΔΕ είναι ίσο με:

Α: 6 Β: 12 Γ: 3 Δ: 16 **(Μονάδες 15)**

β) Αν η κάθετη που άγεται από το Ε προς την ευθεία ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ σε σημείο Ζ, τότε:

Α: ΑΕ = ΕΖ Β: $AE = \frac{1}{2}EZ$ Γ: ΑΕ = 2ΕΖ Δ: ΑΕ = 3ΕΖ **(Μονάδες 10)**

Λύση



α) Είναι $A_1 = A_2 = 30^\circ$ (1)

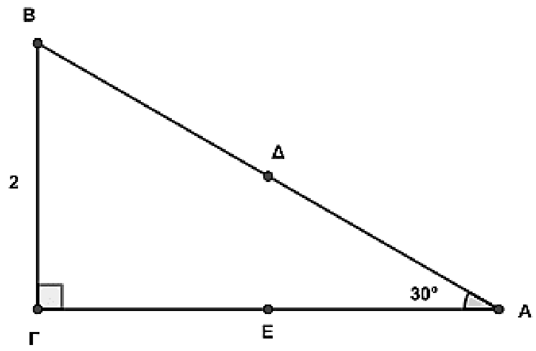
Αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές του ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες, οπότε θα ισχύει $A_1 = E_1$ (2) ως γωνίες εντός εναλλάξ των παράλληλων πλευρών ΑΒ και ΔΓ με τέμνουσα την ΑΕ.

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $E_1 = A_2$ οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με ΑΔ = ΔΕ και ΑΔ = 6, άρα ΔΕ = 6. Επομένως, σωστή απάντηση είναι η Α.

β) Επειδή η ΕΖ είναι κάθετη στη ΑΒ, το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Z και με $A_1 = 30^\circ$ οπότε η απέναντί της κάθετη πλευρά ΕΖ θα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας ΑΕ, δηλαδή

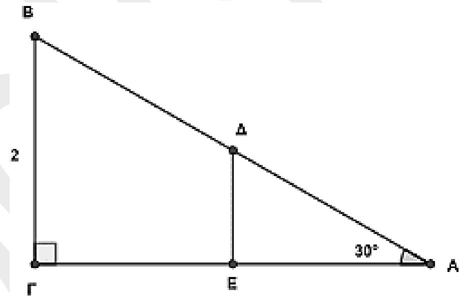
$EZ = \frac{1}{2}AE \Leftrightarrow AE = 2EZ$. Επομένως, σωστή απάντηση είναι η Γ.

20945.Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος δίνονται $A = 30^\circ$, ΒΓ=2 και τα σημεία Δ, Ε μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα.
Να υπολογίσετε:
α) το μήκος του ΔΕ.
(Μονάδες 9)
β) το μήκος της πλευράς ΑΒ.
(Μονάδες 9)
γ) το μήκος του ΓΔ.
(Μονάδες 7)



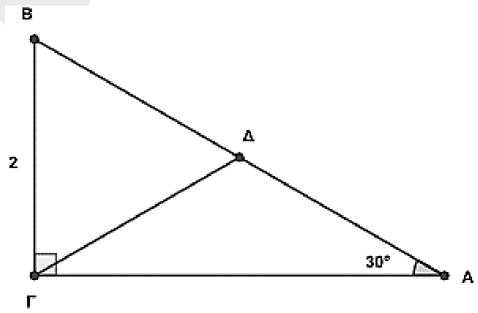
Λύση

α) Τα Δ, Ε είναι μέσα των δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ οπότε το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ ισούται με το μισό της τρίτης πλευράς.
Δηλαδή $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2} = 1$

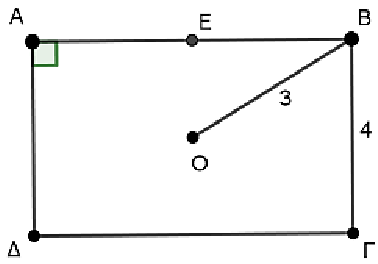


β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η $A = 30^\circ$,οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας. Δηλαδή
$ΒΓ = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow AB = 2ΒΓ = 4$.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΓΔ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Άρα θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας. Δηλαδή $ΓΔ = \frac{AB}{2} = 2$

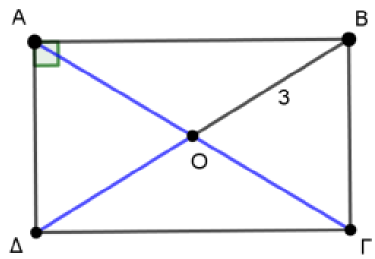


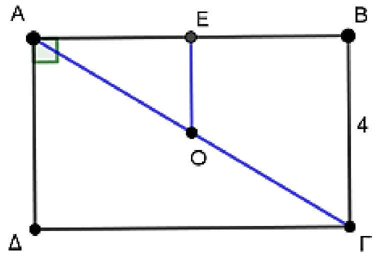
20951.Δίνεται το ορθογώνιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος, στο οποίο το Ο είναι το Κέντρο του και το τμήμα ΟΒ = 3.
Αν Ε είναι το μέσο της ΑΒ και η ΒΓ = 4 τότε:
α) να χαράξετε τις διαγώνιες ΑΓ, ΒΔ του ορθογωνίου και να υπολογίσετε τα μήκη τους.
(Μονάδες 13)
β) να υπολογίσετε το μήκος του ΟΕ.
(Μονάδες 12)



Λύση

α) Οι διαγώνιες του ορθογωνίου τέμνονται στο κέντρο του παραλληλογράμμου. Οπότε χαράσσουμε τις διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ του ορθογωνίου να διέρχονται από το Ο. Το Ο είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου, επομένως το μέσο της διαγωνίου ΒΔ.
Άρα η ΒΔ = 2·ΒΟ = 2·3 = 6.
Στο ορθογώνιο οι διαγώνιές του είναι ίσες.
Επομένως η διαγώνιος ΑΓ = ΒΔ = 6.

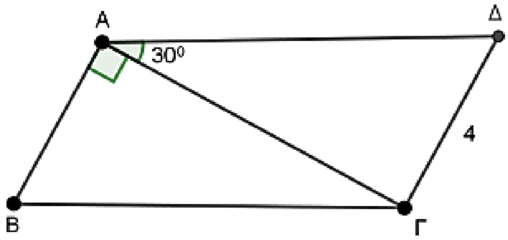




β) Το Ο είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου, άρα το μέσο της διαγωνίου ΑΓ. Επίσης από τα δεδομένα το Ε είναι το μέσον της ΑΒ. Έτσι στο τρίγωνο ΑΒΓ το ευθύγραμμο τμήμα ΟΕ ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών του, επομένως θα ισούται με το μισό της τρίτης πλευράς.

Δηλαδή $ΟΕ = \frac{ΒΓ}{2} = 2$.

21012.Στο διπλανό σχήμα, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο στο οποίο η διαγώνιος ΑΓ είναι κάθετη στην πλευρά του ΑΒ. Επίσης η πλευρά του ΓΔ = 4 και η γωνία ΓΑΔ ισούται με 30^0 .



α) Να υπολογίσετε πόσες μοίρες είναι η γωνία ΒΓΔ. (Μονάδες 10)

β) Πόσο είναι το μήκος της πλευράς ΑΒ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες, οπότε:

$ΒΓΔ = ΒΑΔ = ΒΑΓ + ΓΑΔ = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$

β) Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, οπότε: ΑΒ = ΓΔ = 4.

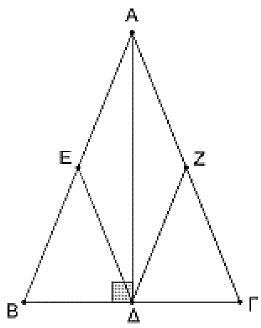
γ) Λόγω του παραλληλογράμμου έχουμε $ΑΓΒ = ΓΑΔ = 30^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΓΒ και ΑΔ που τέμνονται από την ΓΑ. Οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία του ΑΓΒ ισούται με 30^0 . Επομένως η απέναντι κάθετη πλευρά θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας. Δηλαδή

$ΑΒ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΒΓ = 2ΑΒ = 8$

22095.Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 12 και το ύψος του ΑΔ. Έστω Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι ΔΕ = 6 και ΔΖ = 6. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΔΖ είναι ρόμβος. (Μονάδες 13)



Λύση

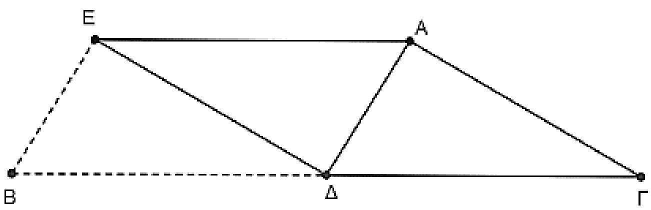
α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ η ΔΕ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $ΔΕ = \frac{ΑΒ}{2} = 6$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ, το ΔΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $ΔΖ = \frac{ΑΓ}{2} = 6$.

β) Είναι ΑΕ = ΔΕ = ΔΖ = ΑΖ = 6, στο τετράπλευρο ΑΕΔΖ οι πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

4ο Θέμα

19842.Στο διπλανό σχήμα , το τετράπλευρο ΕΑΓΔ είναι παραλληλόγραμμο με ΕΑ = 2 ΑΔ. Η παράλληλη από το Ε προς την ΑΔ τέμνει την προέκταση της ΓΔ προς το Δ σε σημείο Β.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τμήμα ΕΑ είναι παράλληλο στο τμήμα ΒΔ. (Μονάδες 4)

ii. Το τετράπλευρο ΕΑΔΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

iii. Το σημείο Δ είναι το μέσο του ΒΓ και ότι ΒΓ = 4 ΑΔ. (Μονάδες 10)

β) Αν το παραλληλόγραμμο ΕΑΓΔ είναι ρόμβος, να βρείτε το είδος του τριγώνου ΒΕΓ ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 5)

Λύση

α)i. Το τετράπλευρο ΕΑΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε θα είναι ΕΑ // ΔΓ ως απέναντι πλευρές του, οπότε η ΕΑ θα είναι παράλληλη στη ΒΓ, άρα και το τμήμα ΕΑ θα είναι παράλληλο με το τμήμα ΒΔ.

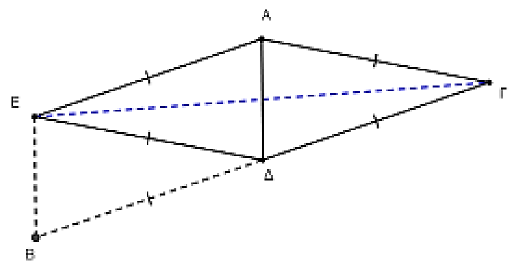
ii. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι οι πλευρές ΕΑ και ΒΔ του τετραπλεύρου ΕΑΔΒ είναι παράλληλες. Από τα δεδομένα έχουμε ότι η ΕΒ είναι παράλληλη στη ΑΔ. Επομένως το τετράπλευρο ΕΑΔΒ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του ΕΑ, ΒΔ και ΑΔ, ΕΒ ανά δύο παράλληλες.

iii. Από το ερώτημα α)ii. έχουμε ότι το ΕΑΔΒ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε θα είναι ΕΑ = ΒΔ ως απέναντι πλευρές του. Από τα δεδομένα έχουμε ότι το ΕΑΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε θα είναι ΕΑ = ΔΓ ως απέναντι πλευρές του. Επομένως θα έχουμε ΕΑ = ΒΔ = ΔΓ, οπότε και ΒΔ = ΔΓ.
Άρα το Δ είναι μέσο της ΒΓ. Οπότε ΒΓ = 2ΔΓ = 2ΕΑ = 2(2ΑΔ) = 4ΑΔ, όπου ΕΑ = 2ΑΔ (από τα δεδομένα).

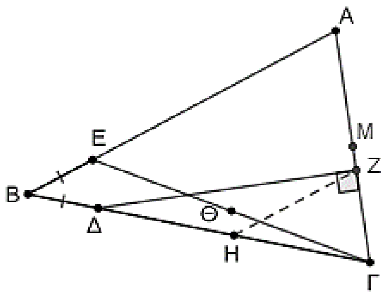
β) Αν το τετράπλευρο ΕΑΓΔ είναι ρόμβος, τότε ως ρόμβος θα έχει όλες του τις πλευρές ίσες, δηλαδή ΕΑ = ΕΔ = ΔΓ = ΑΓ (1). Αφού Δ είναι το μέσο του ΒΓ (από το β) ερώτημα), θα είναι ΒΔ = ΔΓ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) θα προκύπτει ότι

$$ΕΔ = ΔΓ = ΔΒ = \frac{ΒΓ}{2}$$

Οπότε, στο τρίγωνο ΒΕΓ η ΕΔ είναι διάμεσος στην πλευρά του ΒΓ και ισούται με το μισό της πλευράς, άρα το τρίγωνο ΒΕΓ θα είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά ΒΓ και ορθή τη γωνία $\widehat{ΒΕΓ}$.



20557.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ και Ε στις πλευρές ΒΓ και ΒΑ αντίστοιχα, ώστε ΒΔ = ΒΕ. Φέρνουμε την ΔΖ κάθετη στην ΑΓ. Θεωρούμε τα μέσα Η, Θ, Μ των ΔΓ, ΕΓ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

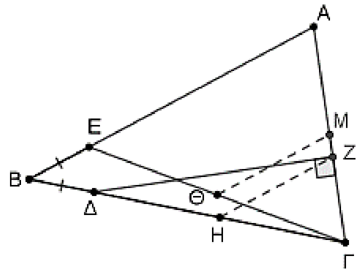


α) $ΖΗ = \frac{ΔΓ}{2}$. (Μονάδες 09)

β) $ΜΘ = \frac{ΑΕ}{2}$. (Μονάδες 09)

γ) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του, ώστε ΖΗ = ΜΘ; (Μονάδες 07)

Λύση



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΖΔΓ η διάμεσος ΖΗ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΔΓ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή:

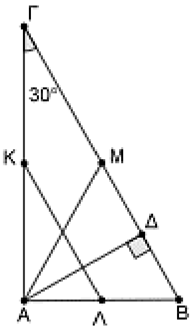
$ZH = \frac{\Delta\Gamma}{2}$ (1).

β) Στο τρίγωνο ΑΕΓ, το σημείο Μ είναι μέσο της πλευράς ΑΓ και το σημείο Θ είναι μέσο της πλευράς ΓΕ, οπότε το τμήμα ΜΘ που τα ενώνει θα είναι ίσο μισό της τρίτης πλευράς ΑΕ, δηλαδή : $M\Theta = \frac{AE}{2}$ (2)

γ) Θέλουμε ΖΗ = ΜΘ. Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{AE}{2} \Leftrightarrow \Delta\Gamma = AE$.

Από υπόθεση έχουμε ΒΔ = ΒΕ. Προσθέτουμε αυτές τις σχέσεις κατά μέλη και έχουμε ΔΓ + ΒΔ = ΑΕ + ΒΕ, άρα ΒΓ = ΑΒ. Επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, με βάση ΑΒ.

20558.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(A = 90^\circ\right)$. Έστω Κ, Λ, Μ τα μέσα των πλευρών ΑΓ, ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΚΛ = ΑΜ. **(Μονάδες 09)**

ii. Το ΑΚΜΛ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. **(Μονάδες 09)**

β) Έστω $\Gamma = 30^\circ$ και ΑΔ ύψος του τριγώνου. Προεκτείνουμε το ΑΔ κατά ίσο τμήμα ΔΖ. Τι είδους τετράπλευρο είναι το ΑΜΖΒ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 07)**

Λύση

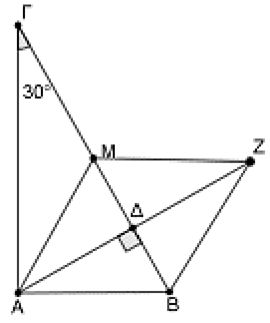
α) i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο η ΑΜ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα ισούται με το μισό της, δηλαδή: $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ (1).

Το σημείο Κ είναι μέσο της πλευράς ΑΓ και το σημείο Λ μέσο της πλευράς ΑΒ, οπότε το τμήμα ΚΛ θα ισούται με το μισό της τρίτης πλευράς ΒΓ, δηλαδή: $K\Lambda = \frac{B\Gamma}{2}$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε ότι ΚΛ = ΑΜ.

ii. Το σημείο Κ είναι μέσο της πλευράς ΑΓ και το σημείο Μ μέσο της πλευράς ΒΓ, οπότε το τμήμα ΚΜ θα ισούται με το μισό της τρίτης πλευράς ΑΒ και θα είναι παράλληλο σε αυτήν, δηλαδή: $KM = \frac{AB}{2} = A\Lambda$.

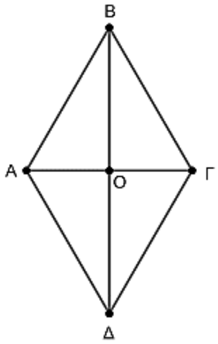
Επομένως το τετράπλευρο ΑΚΜΛ είναι παραλληλόγραμμα γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, ΚΜ = // ΑΛ. Στο ερώτημα α)i αποδείξαμε ότι ΚΛ = ΑΜ. Επομένως το παραλληλόγραμμο ΑΚΜΛ είναι ορθογώνιο γιατί έχει τις διαγώνιές του ίσες.



β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\Gamma = 30^\circ$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά ΑΒ θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΒΓ, δηλαδή: $AB = \frac{B\Gamma}{2}$ (3).

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έχουμε ότι ΑΜ = ΑΒ = ΒΜ, δηλαδή το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισόπλευρο, οπότε το ύψος του ΑΔ θα είναι και διάμεσος, δηλαδή ΜΔ = ΔΒ. Από υπόθεση έχουμε ότι ΑΔ = ΔΖ. Επομένως, το τετράπλευρο ΑΜΖΒ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιοί του ΜΒ και ΑΖ διχοτομούνται. Επειδή όπως αναφέραμε, ΑΜ = ΑΒ, το παραλληλόγραμμο ΑΜΖΒ είναι ρόμβος γιατί δύο διαδοχικές του πλευρές είναι ίσες.

21392.Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος με κέντρο Ο, ΑΒ = 4 και ΟΑ = 2.



α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $ABO = 30^\circ$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τρεις γωνίες στο διπλανό σχήμα, εκτός της ABO, που έχουν μέτρο 30°. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα στο παρακάτω σχήμα, εκτός του ΑΒ, που έχουν μήκος 4. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

Λύση

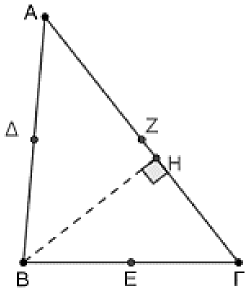
α) Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα, άρα το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο με $AOB = 90^\circ$. Επειδή στο τρίγωνο ΑΟΒ είναι ΑΒ = 4 και $OA = 2 = \frac{AB}{2}$ η απέναντι γωνία της ΟΑ, η $ABO = 30^\circ$.

β) Οι απέναντι γωνίες του ρόμβου είναι ίσες, άρα $AB\Gamma = \Gamma\Delta A$.Επίσης οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του, άρα η διαγώνιος ΒΔ διχοτομεί τις γωνίες $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta A$. Επομένως $ABO = \Gamma BO = \Gamma\Delta O = A\Delta O = 30^\circ$.

γ) Όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες, άρα ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ = 4. Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούνται, άρα το Ο είναι το μέσο της ΑΓ και επειδή ΟΑ = 2, είναι ΑΓ = 2ΟΑ= 4.

3ο Θέμα

21060.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Φέρνουμε το ύψος ΒΗ. Να αποδείξετε ότι:



α) i. ΖΔ = ΕΓ **(Μονάδες 07)**

ii. ΗΕ = ΕΓ. **(Μονάδες 07)**

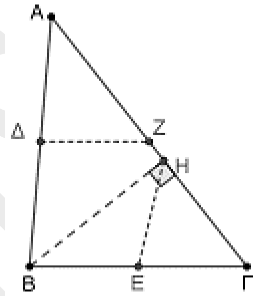
β) Η ΔΕ είναι παράλληλη στην ΑΓ.

(Μονάδες 06)

γ) ΔΗ = ΖΕ.

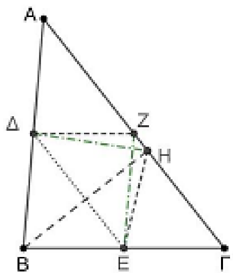
(Μονάδες 05)

Λύση



α) i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Δ και Ζ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Επομένως, το τμήμα ΔΖ θα είναι ίσο και παράλληλο με το μισό της ΒΓ, δηλαδή: $ΔΖ = \frac{ΒΓ}{2} = ΕΓ$.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΗΓ η ΗΕ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΓ. Επομένως, η ΗΕ θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΒΓ, δηλαδή: $ΗΕ = \frac{ΒΓ}{2} = ΕΓ$



β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Δ και Ε είναι μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Επομένως, το τμήμα ΔΕ θα είναι ίσο και παράλληλο με το μισό της ΑΓ, δηλαδή ΔΕ//ΑΓ.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΗΑ η ΗΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΑ. Επομένως, η ΗΔ θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΒΑ, δηλαδή: $ΗΔ = \frac{ΑΒ}{2}$. (1)

Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Ε και Ζ είναι μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Επομένως, το τμήμα

ΕΖ θα είναι ίσο και παράλληλο με το μισό της ΑΒ, δηλαδή: $ΖΕ = \frac{ΑΒ}{2}$. (2)

Από (1) και (2) ΖΕ και ΔΗ θα είναι ίσες.

ΤΡΑΠΕΖΙΟ

2º Θέμα

14517.Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις ΑΒ και ΔΓ με ΔΓ = 2ΑΒ και ίσες πλευρές ΑΔ και ΒΓ.

Αν είναι ΑΒ = ΑΔ = ΒΓ = 12 και $\Delta = 60^\circ$,να υπολογίσετε:

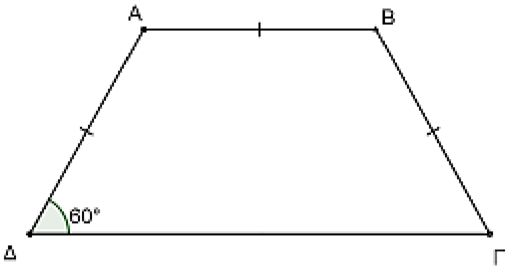
α) τις γωνίες του τραπεζίου.

(Μονάδες 15)

β) την περίμετρο του τραπεζίου.

(Μονάδες 10)

Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



Λύση

α) Αφού το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές, οι προσκείμενες γωνίες σε βάση του είναι ίσες.

Οπότε $\Delta = \Gamma = 60^\circ$ και $A = B$.

Οι γωνίες Α και Δ είναι παραπληρωματικές, ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ με τέμνουσα την ΑΔ, δηλαδή $A + \Delta = 180^\circ \Leftrightarrow A + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A = 120^\circ$, οπότε και $B = 120^\circ$.

β) Από τα δεδομένα έχουμε ΔΓ = 2ΑΒ με ΑΒ = 12, άρα ΔΓ = 2· 12 = 24.
Η περίμετρος του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι ΑΒ + ΒΓ + ΔΓ + ΑΔ = 12 + 12 + 24 + 12 = 60.

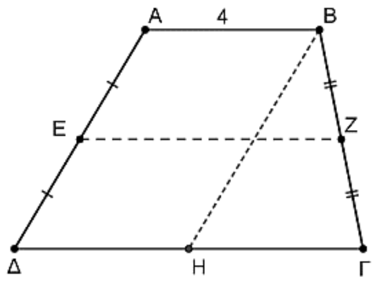
18158.Στο τραπέζιο του παρακάτω σχήματος ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ), έχουμε ΑΒ = 4 και ΔΓ = 8.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου του ΕΖ.

(Μονάδες 12)

β) Από το Β φέρουμε ΒΗ παράλληλη στην ΑΔ.
Να αποδείξετε ότι ΓΗ = ΑΒ.

(Μονάδες 13)

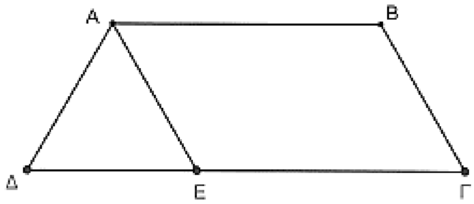


Λύση

α) Η διάμεσος του τραπεζίου ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων του, επομένως

$$EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{4+8}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

β) Φέρουμε ΒΗ // ΑΔ. ΑΒ // ΔΗ σαν βάσεις τραπεζίου και ΒΗ // ΑΔ από υπόθεση, οπότε το ΑΒΗΔ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.
Επομένως οι απέναντι πλευρές του θα είναι ίσες, δηλαδή ΔΗ = ΑΒ = 4. ΓΗ = ΔΓ – ΔΗ = 8 – 4 = 4 = ΑΒ.



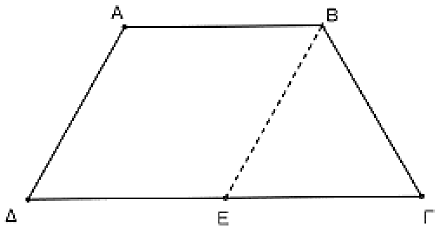
19821.Στο σχήμα που ακολουθεί, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις τις πλευρές ΑΒ, ΔΓ και ίσες πλευρές τις ΑΔ και ΒΓ. Η παράλληλη από το Α στην ΒΓ, δηλαδή η ΑΕ, τέμνει την πλευρά ΔΓ σε σημείο Ε.
α) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας συμπληρωμένη την ακόλουθη πρόταση:
«Στο ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ του σχήματος παράλληλες μεταξύ τους είναι η πλευρά ……… με την πλευρά …….., οι προκείμενες γωνίες στη βάση του ΑΒ είναι η γωνία ……. και η γωνία ……. και οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του ΔΓ είναι η γωνία……… και η γωνία ………».
(Μονάδες 9)
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)
γ) Αν είναι ΒΓ =5, να δείξετε ότι ΑΔ = ΑΕ= 5. (Μονάδες 8)

Λύση

α) «Στο ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ του σχήματος παράλληλες μεταξύ τους είναι η πλευρά **ΑΒ** με την πλευρά **ΔΓ**, οι προκείμενες γωνίες στη βάση του ΑΒ είναι η γωνία $\widehat{\Delta A B}$ και η γωνία $\hat{B}$ και οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του ΔΓ είναι η γωνία $\hat{\Delta}$ και η γωνία $\hat{\Gamma}$».

β) Οι ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες ως βάσεις του τραπεζίου, οπότε και το τμήμα ΑΒ θα είναι παράλληλο και με το τμήμα ΕΓ. Επίσης από τα δεδομένα έχουμε ότι, η ΑΕ είναι παράλληλη στη ΒΓ. Άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, δηλαδή την ΑΒ με την ΕΓ παράλληλες και την ΑΕ με την ΒΓ παράλληλες.

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε ότι, το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε θα έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, άρα θα είναι ΒΓ = ΑΕ και αφού ΒΓ = 5 τότε ΑΕ = 5 (1). Από τα δεδομένα έχουμε ότι, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο με ίσες πλευρές τις ΑΔ και ΒΓ, δηλαδή ΑΔ = ΒΓ και αφού ΒΓ = 5, τότε ΑΔ = 5 (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ΑΔ = ΑΕ =5.



19826.Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις ΑΒ και ΔΓ, ΑΔ = ΒΓ και η ΒΕ είναι παράλληλη στην ΑΔ.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)
β) Αν είναι ΑΒ = ΑΔ = 12 και ΔΓ = 2ΑΒ,
i. να υπολογίσετε την περίμετρο του τετραπλεύρου ΑΒΕΔ. (Μονάδες 9)
ii. να δείξετε ότι το σημείο Ε είναι το μέσο του τμήματος ΔΓ. (Μονάδες 7)

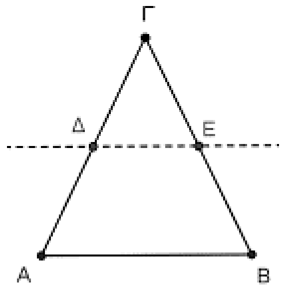
Λύση

α) Αφού το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις ΑΒ και ΔΓ, τότε η ΑΒ είναι παράλληλη στην ΔΓ, άρα ΑΒ παράλληλη και στην ΔΕ. Από τα δεδομένα έχουμε ότι και οι ΒΕ, ΑΔ είναι παράλληλες. Άρα το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

β) i. Αφού το ΑΒΕΔ είναι παραλληλόγραμμο, θα έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, δηλαδή ΑΒ = ΔΕ και ΑΔ = ΒΕ, και επειδή από τα δεδομένα έχουμε ότι ΑΒ =ΑΔ =12, προκύπτει ότι
ΑΒ = ΒΕ = ΔΕ = ΑΔ = 12 (1).
Οπότε η περίμετρος Π του ΑΒΕΔ είναι : Π = ΑΒ +ΒΕ +ΔΕ +ΑΔ= 12 + 12 + 12 + 12 = 4·12 = 48.

ii. Είναι ΔΓ = 2ΑΒ με ΑΒ =12, άρα ΔΓ = 2·12 = 24 . Έχουμε ότι ΔΓ = ΔΕ +ΕΓ με ΔΓ = 24 και ΔΕ = 12 από τη σχέση (1), οπότε ΕΓ = 24 – 12 =12. Συνεπώς, ΔΕ = ΕΓ = 12 άρα το Ε είναι μέσο του ΔΓ.

19834.Το τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος είναι ισοσκελές με ΓΑ = ΓΒ = 8, το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς του ΑΓ και η ευθεία ΔΕ είναι παράλληλη στην πλευρά του ΑΒ, όπου ΑΒ = 6.



α) Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευράς ΓΒ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 6)
β) Να βρείτε τα μήκη των τμημάτων ΔΕ, ΔΑ και ΕΒ, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 9)
γ) Να αιτιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο και να υπολογίσετε την περίμετρό του. (Μονάδες 10)

Λύση

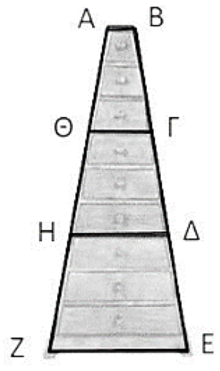
α) Από τα δεδομένα έχουμε ότι, το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΓΑ του τριγώνου ΑΒΓ και η ΔΕ είναι παράλληλη στην πλευρά του ΑΒ, οπότε η ΔΕ θα περνάει από το μέσο της τρίτης πλευράς ΓΒ του τριγώνου, δηλαδή το σημείο Ε θα είναι το μέσο του ΓΒ.

β) Από τα δεδομένα και το α) ερώτημα έχουμε ότι τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των ίσων πλευρών ΓΑ και ΓΒ του τριγώνου ΑΒ, οπότε: $\Delta A = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{8}{2} = 4$ και $EB = \frac{B\Gamma}{2} = 4$.
Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα Δ και Ε των πλευρών του ΓΑ και ΓΒ αντίστοιχα, οπότε θα είναι παράλληλο στην πλευρά ΑΒ και ίσο με το μισό της, δηλαδή είναι ΔΕ // ΑΒ και $\Delta E = \frac{AB}{2} = 3$.

γ) Το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο γιατί έχει μόνο ένα ζεύγος απέναντι πλευρών παράλληλες, τις ΔΕ και ΑΒ από το β) ερώτημα, και οι άλλες δύο, οι ΑΔ και ΒΕ, δεν είναι παράλληλες καθώς ως πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο σημείο Γ. Επίσης από το β) ερώτημα έχουμε ότι ΔΑ = ΕΒ = 4. Επομένως το τραπέζιο ΑΔΕΒ είναι ισοσκελές. Η περίμετρος του Π θα είναι :
Π =ΑΒ +ΔΑ + ΔΕ +ΕΒ = 6+ 4 + 3+ 4 = 17.

4^{ο} Θέμα

14581.Στην εικόνα που ακολουθεί παρουσιάζεται το σχέδιο μιας κατασκευής τριών μερών με συρτάρια. Τόσο η κατασκευή όσο και τα επιμέρους τμήματά της είναι σχήματος τραπεζίου. Συγκεκριμένα, το τετράπλευρο ΑΒΕΖ του σχεδίου της κατασκευής είναι τραπέζιο με βάσεις ΑΒ και ΖΕ, το τετράπλευρο ΑΒΓΘ είναι τραπέζιο με βάσεις ΑΒ και ΘΓ, το τετράπλευρο ΘΓΔΗ είναι τραπέζιο με βάσεις ΘΓ και ΗΔ καθώς και το τετράπλευρο ΗΔΕΖ είναι τραπέζιο με βάσεις ΗΔ και ΖΕ. Επιπλέον, τα Θ, Η και Γ, Δ είναι σημεία των μη παράλληλων πλευρών ΑΖ, ΒΕ αντίστοιχα του τραπεζίου ΑΒΕΖ.



α) Να εξηγήσετε γιατί οι βάσεις ΑΒ, ΘΓ, ΗΔ και ΖΕ των επιμέρους τραπεζίων είναι παράλληλες. (Μονάδες 9)
β) Έστω ότι τα σημεία Θ και Γ είναι τα μέσα των ΑΗ και ΒΔ αντίστοιχα, ενώ τα σημεία Η και Δ είναι τα μέσα των ΘΖ και ΓΕ αντίστοιχα. Αν είναι ΑΒ = 13,5 cm και ΗΔ = 50,5 cm, να βρείτε τα μήκη των τμημάτων:
i. ΘΓ (Μονάδες 8)
ii. ΖΕ (Μονάδες 8)

Λύση

α) Από τα δεδομένα έχουμε:
- Το ΑΒΕΖ είναι τραπέζιο με βάσεις ΑΒ και ΖΕ, οπότε ΑΒ και ΖΕ είναι παράλληλες (ΑΒ // ΖΕ) (1)
- Το ΑΒΓΘ είναι τραπέζιο με βάσεις ΑΒ και ΘΓ, οπότε ΑΒ και ΘΓ είναι παράλληλες (ΑΒ // ΘΓ) (2)
- Το ΘΓΔΗ είναι τραπέζιο με βάσεις ΘΓ και ΗΔ, οπότε ΘΓ και ΗΔ είναι παράλληλες (ΘΓ // ΗΔ) (3)
- Το ΗΔΕΖ είναι τραπέζιο με βάσεις ΗΔ και ΖΕ, οπότε ΗΔ και ΖΕ είναι παράλληλες (ΗΔ // ΖΕ) (4)

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) και (4) προκύπτει ότι ανά δύο διαφορετικές βάσεις είναι παράλληλες προς μία τρίτη, συνεπώς όλες οι βάσεις θα είναι παράλληλες, δηλαδή ΑΒ // ΘΓ // ΗΔ // ΖΕ (5).

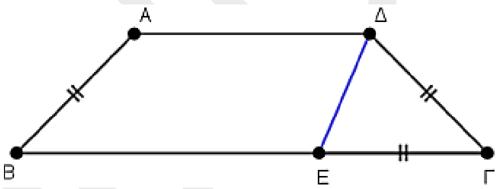
β) i. Από τη σχέση (5) προκύπτει ότι ΑΒ // ΗΔ και επειδή ΑΗ, ΒΔ δεν είναι παράλληλες, γιατί τα σημεία Α, Η και Β, Δ είναι σημεία των μη παράλληλων πλευρών ΑΖ και ΒΕ του τραπεζίου ΑΒΕΖ αντίστοιχα (από δεδομένα), οπότε το τετράπλευρο ΑΒΔΗ είναι τραπέζιο και η ΘΓ είναι η διάμεσός του, αφού τα σημεία Θ και Γ είναι τα μέσα των ΑΗ και ΒΔ αντίστοιχα από τα δεδομένα.

Άρα $\Theta\Gamma = \dfrac{AB + H\Delta}{2} = \dfrac{13{,}5 + 50{,}5}{2} = \dfrac{64}{2} = 32\text{cm}$.

i. Από τη σχέση (5) προκύπτει ότι ΘΓ // ΖΕ και επειδή ΘΖ, ΓΕ δεν είναι παράλληλες, γιατί τα σημεία Θ, Ζ και Β, Δ είναι σημεία των μη παράλληλων πλευρών ΑΖ και ΒΕ του τραπεζίου ΑΒΕΖ αντίστοιχα (από δεδομένα), οπότε το τετράπλευρο ΘΓΕΖ είναι τραπέζιο και η ΗΔ είναι η διάμεσός του, αφού τα σημεία Η και Δ είναι τα μέσα των ΘΖ και ΓΕ αντίστοιχα από τα δεδομένα.

Άρα $H\Delta = \dfrac{\Theta\Gamma + ZE}{2} \Leftrightarrow 50{,}5 = \dfrac{32 + ZE}{2} \Leftrightarrow 101 = 32 + ZE \Leftrightarrow ZE = 69\text{cm}$

16767.Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ του σχήματος με ΑΔ//ΒΓ και ΒΓ > ΔΓ. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε σημείο Ε, τέτοιο ώστε ΓΕ = ΓΔ.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. οι γωνίες ΑΔΕ και ΓΕΔ είναι ίσες. **(Μονάδες 09)**

ii. η ΔΕ είναι διχοτόμος της ΑΔΓ. **(Μονάδες 10)**

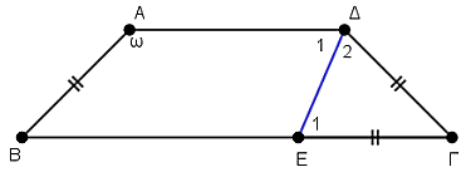
β) Πόσες μοίρες πρέπει να είναι η γωνία Α ώστε το τρίγωνο ΔΕΓ να είναι ισόπλευρο; (Μονάδες 06)

Λύση

α) i. $\Delta_1 = E_1$ (1), γιατί είναι γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ και ΒΓ με τέμνουσα την ΔΕ.

ii. $\Delta_2 = E_1$ (2), γιατί είναι γωνίες προσκείμενες στη βάση ΔΕ του ισοσκελούς τριγώνου ΔΓΕ.

Από (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $\Delta_1 = \Delta_2$ άρα η ΔΕ είναι διχοτόμος της ΑΔΓ.

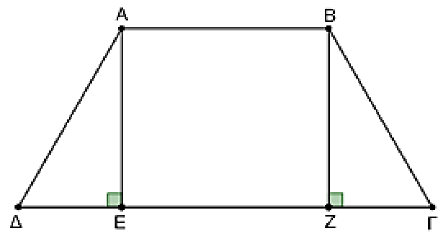


β) Για να είναι το τρίγωνο ΔΕΓ ισόπλευρο, πρέπει οι γωνίες του να είναι 60°, οπότε και $\Delta_2 = 60^\circ$.

Αποδείξαμε στο α)ii) ότι η ΔΕ είναι διχοτόμος της ΑΔΓ, οπότε $A\Delta\Gamma = 120^\circ$.

Επειδή το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές είναι και $A = 120^\circ$.

21399.Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ = 4 και ΓΔ = 8, ΒΓ = ΑΔ = 4 και τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΕΖ = 4. **(Μονάδες 5)**

ii. ΔΕ = ΓΖ = 2. **(Μονάδες 6)**

iii. $\Delta A E = 30^\circ$. **(Μονάδες 6)**

β) Να βρείτε τα μέτρα των προσκείμενων γωνιών σε κάθε βάση του τραπεζίου. **(Μονάδες 8)**

Λύση

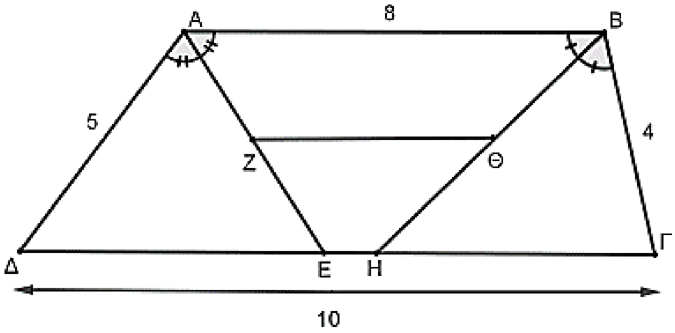
α) i) Το ΑΒΖΕ έχει παράλληλες τις ΑΒ και ΓΔ ως βάσεις του τραπεζίου, καθώς και τις ΑΕ και ΒΖ ως ύψη του τραπεζίου, άρα είναι παραλληλόγραμμο. Επίσης το ΑΒΖΕ έχει $E = 90^\circ$ άρα είναι ορθογώνιο. Επομένως οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, άρα ΕΖ = ΑΒ = 4.

ii) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ είναι ίσα αφού έχουν ίσες υποτείνουσες ΑΔ = ΒΓ = 4 και μία κάθετη πλευρά ΑΕ = ΒΖ ως ύψη του τραπεζίου. Επομένως ΔΕ = ΓΖ.
Είναι $\Delta E + \Gamma Z = \Gamma\Delta - EZ = 8 - 4 = 4$, άρα ΔΕ = ΓΖ = 2.

iii) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΔ η κάθετη πλευρά ΔΕ είναι το μισό της υποτείνουσας ΑΔ αφού ΔΕ = 2 και ΑΔ= 4, άρα $\Delta AE = 30^\circ$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΔ είναι $\Delta AE = 30^\circ$, οπότε $A\Delta E = 90^\circ - \Delta AE = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Ακόμη $B\Gamma Z = A\Delta E = 60^\circ$, ως προσκείμενες στη βάση ΓΔ, αφού στο ισοσκελές τραπέζιο οι γωνίες που πρόσκεινται σε κάθε βάση είναι ίσες.
Στο ορθογώνιο ΑΒΖΕ είναι $EAB = 90^\circ$, επομένως $\Delta AB = \Delta AE + EAB = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$. Ακόμη $AB\Gamma = \Delta AB = 120^\circ$, ως προσκείμενες στη βάση ΑΒ, αφού στο ισοσκελές τραπέζιο οι γωνίες που πρόσκεινται σε κάθε βάση είναι ίσες.

21846.Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ και ΑΒ=8, ΒΓ=4, ΓΔ=10 και ΑΔ=5. Οι διχοτόμοι των γωνιών Α και Β τέμνουν την ΓΔ στα σημεία Ε και Η αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΗ είναι ισοσκελή με βάσεις τις ΑΕ και ΒΗ αντίστοιχα. **(Μονάδες 8)**
β) Να υπολογίσετε το ΕΗ. **(Μονάδες 8)**
γ) Αν Ζ και Θ είναι τα μέσα των ΑΕ και ΒΗ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $Z\Theta = \frac{9}{2}$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Είναι $A_2 = AE\Delta$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΑΕ . Εφόσον η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Α άρα $A_1 = A_2$, οπότε $A_1 = AE\Delta$, ,άρα το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΕ. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι το τρίγωνο ΒΓΗ είναι επίσης ισοσκελές με βάση τη ΒΗ.

β) Από το α) ερώτημα προκύπτει ότι ΔΕ=5 και ΓΗ=4. Έτσι $EH = \Gamma\Delta - \Delta E - H\Gamma = 10 - 5 - 4 = 1$.

γ) Οι ΑΒ και ΕΗ είναι παράλληλες αλλά δεν είναι ίσες, οπότε το ΑΒΗΕ είναι τραπέζιο και εφόσον τα σημεία Ζ και Θ είναι μέσα των μη παραλλήλων πλευρών του το ΖΘ είναι διάμεσος του τραπεζίου, άρα $Z\Theta = \frac{AB + EH}{2} = \frac{9}{2}$.

Θεώρημα Θαλή

2ο Θέμα

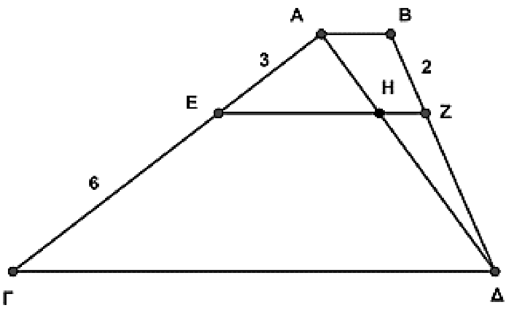
19643.Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΕΖ και ΓΔ είναι παράλληλα. Αν έχουμε ότι ΑΕ = 3, ΕΓ = 6 και ΒΖ = 2, τότε:

α) να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΖ.

(Μονάδες 12)

β) να αποδείξετε ότι ΗΔ = 2·ΑΗ.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Εφόσον ΑΒ, ΕΖ, ΓΔ είναι παράλληλες που τέμνουν τις ΑΓ, ΒΔ θα ισχύει το Θεώρημα του Θαλή οπότε: $\frac{ΑΕ}{ΕΓ}=\frac{ΒΖ}{ΖΔ} \Leftrightarrow \frac{3}{6}=\frac{2}{ΖΔ} \Leftrightarrow 3ΖΔ=12 \Leftrightarrow ΖΔ=4$.

β) Όμοια για τις ίδιες παράλληλες που τέμνουν τις ΑΓ, ΑΔ από το Θεώρημα του Θαλή ισχύει:
$\frac{ΑΕ}{ΕΓ}=\frac{ΑΗ}{ΗΔ} \Leftrightarrow \frac{3}{6}=\frac{ΑΗ}{ΗΔ} \Leftrightarrow 3ΗΔ=6ΑΗ \Leftrightarrow ΗΔ=2ΑΗ$

19828.Στο σχήμα που ακολουθεί, οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι παράλληλες, οι οποίες τέμνουν τις ευθείες $ε_1$ και $ε_2$. Αν είναι ΑΒ =12, ΔΕ = 15 και ΕΖ = 10,

α) να υπολογίσετε το λόγο $\frac{ΕΖ}{ΔΕ}$.

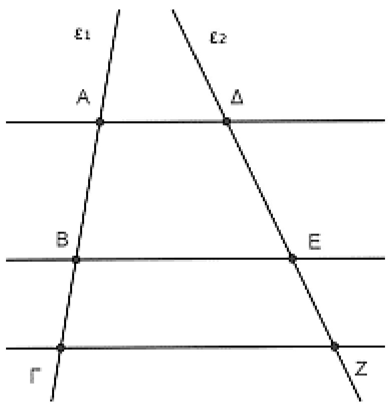
(Μονάδες 7)

β) να δείξετε ότι $\frac{ΒΓ}{ΑΒ}=\frac{2}{3}$.

(Μονάδες 9)

γ) να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

(Μονάδες 9)



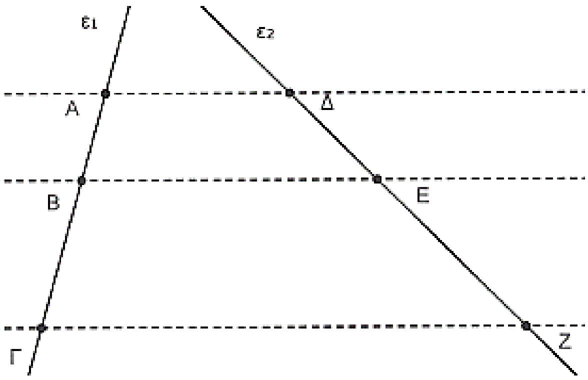
Λύση

α) $\frac{ΕΖ}{ΔΕ}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$.

β) Οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ τέμνονται από τις παράλληλες ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ, οπότε τα τμήματα που ορίζουν οι παράλληλες στις $ε_1$ και $ε_2$ είναι ανάλογα (Θεώρημα Θαλή), δηλαδή:
$\frac{ΑΒ}{ΔΕ}=\frac{ΒΓ}{ΕΖ}=\frac{ΑΓ}{ΔΖ} \Rightarrow \frac{ΑΒ}{ΔΕ}=\frac{ΒΓ}{ΕΖ} \Leftrightarrow \frac{ΕΖ}{ΔΕ}=\frac{ΒΓ}{ΑΒ} \Leftrightarrow \frac{ΒΓ}{ΑΒ}=\frac{2}{3}$.

γ) Από τη σχέση (1) του β) ερωτήματος έχουμε ότι $\frac{ΑΒ}{ΔΕ}=\frac{ΑΓ}{ΔΖ} \Leftrightarrow \frac{12}{15}=\frac{ΑΓ}{25} \Leftrightarrow 15ΑΓ=300 \Leftrightarrow ΑΓ=20$ γιατί ΔΖ = ΔΕ + ΕΖ = 15 + 10 = 25.

19835.Στο σχήμα που ακολουθεί, οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι παράλληλες, οι οποίες τέμνουν τις ευθείες ε_1 και ε_2 στα σημεία Α, Β, Γ και Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα. Αν είναι ΑΒ =4, ΒΓ = 8 και ΔΖ = 18, τότε



α) να υπολογίσετε το λόγο $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$, **(Μονάδες 5)**

β) να αιτιολογήσετε γιατί είναι $\frac{ΔΕ}{ΔΖ}=\frac{1}{3}$, **(Μονάδες 12)**

γ) να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΔΕ και ΕΖ. **(Μονάδες 8)**

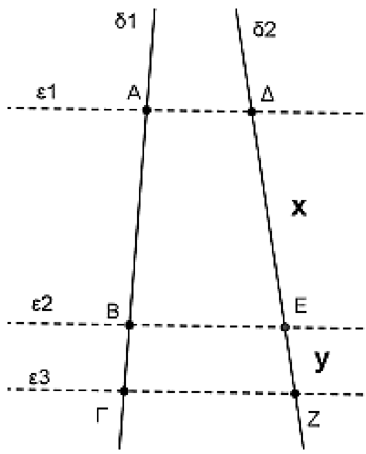
Λύση

α) Αφού ΑΒ = 4 και ΒΓ = 8, τότε ΑΓ = ΑΒ + ΒΓ = 4 + 8 = 12. Οπότε $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

β) Οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται από τις παράλληλες ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ, οπότε τα τμήματα που ορίζουν οι παράλληλες στις ε_1 και ε_2 θα είναι ανάλογα (Θεώρημα Θαλή), δηλαδή θα ισχύει:
$\frac{ΑΒ}{ΔΕ}=\frac{ΒΓ}{ΕΖ}=\frac{ΑΓ}{ΔΖ}\Rightarrow\frac{ΑΒ}{ΔΕ}=\frac{ΑΓ}{ΔΖ}\Leftrightarrow\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΔΕ}{ΔΖ}\Leftrightarrow\frac{ΔΕ}{ΔΖ}=\frac{1}{3}$.

γ) $\frac{ΔΕ}{ΔΖ}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{ΔΕ}{18}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3ΔΕ=18\Leftrightarrow ΔΕ=6$.
Αφού ΔΖ =18 και ΔΕ = 6, άρα ΕΖ = 18 – 6 = 12.

22116.Στο σχήμα που ακολουθεί, οι ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 είναι παράλληλες και τέμνουν τις ευθείες δ_1, δ_2 στα σημεία Α, Β, Γ και Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα. Έστω ότι είναι ΑΒ = 10 και ΒΓ = 3.



α) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{ΒΓ}{ΑΒ}$. **(Μονάδες 5)**

β) i. Να συμπληρώσετε τα κενά στην αναλογία που ακολουθεί, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

$$\frac{ΑΒ}{....}=\frac{....}{ΕΖ}=\frac{ΑΓ}{....}$$ **(Μονάδες 5)**

ii. Να δείξετε ότι $\frac{ΒΓ}{ΑΒ}=\frac{y}{x}$, όπου $x=ΔΕ$ και $y=ΕΖ$. **(Μονάδες 8)**

γ) Αν είναι y = 4, να υπολογίσετε το x. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) $\frac{ΒΓ}{ΑΒ}=\frac{3}{10}=0,3$

β) i. Επειδή οι ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 είναι παράλληλες και τέμνουν τις ευθείες δ_1 και δ_2, από το θεώρημα του Θαλή θα προκύπτει η αναλογία $\frac{ΑΒ}{ΔΕ}=\frac{ΒΓ}{ΕΖ}=\frac{ΑΓ}{ΔΖ}\ (1)$.

ii. Από τη σχέση (1) έχουμε ότι: $\frac{ΑΒ}{ΔΕ}=\frac{ΒΓ}{ΕΖ}\Leftrightarrow\frac{ΕΖ}{ΔΕ}=\frac{ΒΓ}{ΑΒ}\Leftrightarrow\frac{ΒΓ}{ΑΒ}=\frac{y}{x}$.

γ) Είναι $\frac{ΒΓ}{ΑΒ}=\frac{y}{x}\Leftrightarrow\frac{y}{x}=\frac{3}{10}\Leftrightarrow\frac{4}{x}=\frac{3}{10}\Leftrightarrow 3x=40\Leftrightarrow x=\frac{40}{3}$

22117.Στο σχήμα που ακολουθεί, οι ευθείες $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$ είναι παράλληλες και τέμνουν τις ευθείες $δ_1$, $δ_2$ στα σημεία Α, Β, Γ και Δ, Β, Ε αντίστοιχα.
Έστω ότι είναι ΑΒ = 14 και ΒΓ = 4.

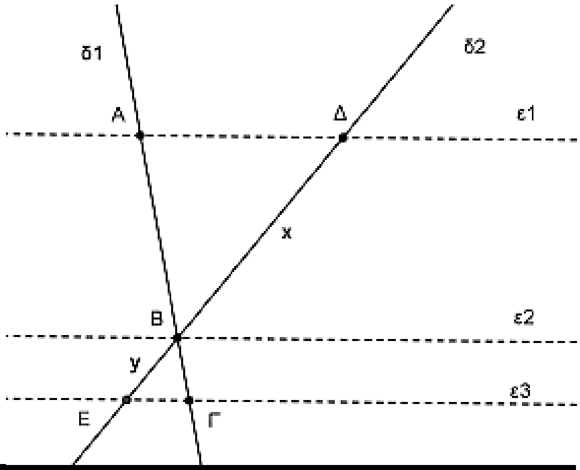
α) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{x}{y}$, όπου $x=ΒΔ$ και $y=ΒΕ$. **(Μονάδες 10)**

γ) Αν είναι x = 16, να υπολογίσετε το y.

(Μονάδες 10)



Λύση

α) $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}$.

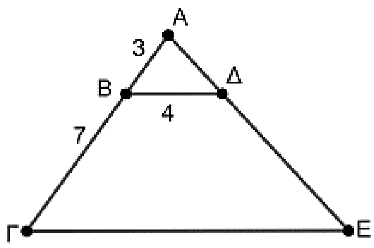
β) Επειδή οι ευθείες $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$ είναι παράλληλες και τέμνουν τις ευθείες $δ_1$ και $δ_2$, από το θεώρημα του Θαλή θα προκύπτει η αναλογία $\frac{ΑΒ}{ΔΒ}=\frac{ΒΓ}{ΒΕ}=\frac{ΑΓ}{ΔΕ}\Rightarrow\frac{ΑΒ}{ΔΒ}=\frac{ΒΓ}{ΒΕ}\Rightarrow\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{ΔΒ}{ΒΕ}=\frac{x}{y}$

γ) Είναι $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{x}{y}\Leftrightarrow\frac{x}{y}=\frac{7}{2}\Leftrightarrow\frac{16}{y}=\frac{7}{2}\Leftrightarrow 7y=32\Leftrightarrow y=\frac{32}{7}$

4ο Θέμα

19520.Δίνεται το τραπέζιο ΒΓΕΔ του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές ΓΒ και ΕΔ όταν προεκταθούν τέμνονται στο σημείο Α. Επιπλέον δίνεται ότι ΑΒ = 3 , ΒΓ = 7 και ΒΔ = 4.
α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών ΑΓ και ΓΕ του τριγώνου ΑΓΕ. **(Μονάδες 12)**
β) Αν επιπλέον το ΑΒΔ είναι ισοσκελές να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΕ του τριγώνου ΑΓΕ.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Το μήκος της πλευράς ΑΓ είναι ΑΓ = ΑΒ + ΒΓ = 3 + 7 = 10.
Οι ΒΔ και ΓΕ είναι παράλληλες ως βάσεις του τραπεζίου ΒΓΕΔ. Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ΑΒΔ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΓ και ΑΕ του τριγώνου ΑΓΕ και την παράλληλη ΒΔ στην πλευρά ΓΕ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΓΕ οπότε:

$$\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΒΔ}{ΓΕ}=\frac{ΑΔ}{ΑΕ}\Rightarrow\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΒΔ}{ΓΕ}\Leftrightarrow\frac{3}{10}=\frac{4}{ΓΕ}\Leftrightarrow 3ΓΕ=40\Leftrightarrow ΓΕ=\frac{40}{3}$$

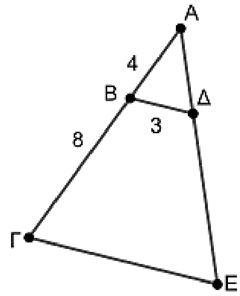
β) Είναι $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΑΔ}{ΑΕ}$

Διακρίνουμε τις δύο παρακάτω περιπτώσεις για το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΔ.

1η περίπτωση: το ΑΒΔ είναι ισοσκελές με ΑΔ = ΑΒ = 3, τότε $\frac{3}{10}=\frac{3}{ΑΕ}\Leftrightarrow ΑΕ=10$

2η περίπτωση: το ΑΒΔ είναι ισοσκελές με ΑΔ = ΑΒ = 4, τότε $\frac{3}{10}=\frac{4}{ΑΕ} \Leftrightarrow ΑΕ=\frac{40}{3}$.

19521.Δίνεται το τραπέζιο ΒΓΕΔ του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές ΓΒ και ΕΔ όταν προεκταθούν τέμνονται στο σημείο Α, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα. Επιπλέον δίνεται ότι ΑΒ = 4 , ΒΓ = 8 και ΒΔ = 3.



α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΓΕ.

(Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον το ΑΒΔ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΔ, να βρείτε την περίμετρο του τραπεζίου.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Το μήκος της πλευράς *ΑΓ* είναι ΑΓ = ΑΒ + ΒΓ = 4 + 8 = 12. Οι ΒΔ και ΓΕ είναι παράλληλες ως βάσεις του τραπεζίου ΒΓΕΔ. Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ΑΒΔ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΓ και ΑΕ του τριγώνου ΑΓΕ και την παράλληλη ΒΔ στην πλευρά ΓΕ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΓΕ οπότε θα είναι:

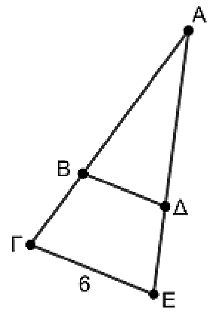
$$\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΒΔ}{ΓΕ}=\frac{ΑΔ}{ΑΕ} \Rightarrow \frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΒΔ}{ΓΕ} \Leftrightarrow \frac{4}{12}=\frac{3}{ΓΕ} \Leftrightarrow 4ΓΕ=36 \Leftrightarrow ΓΕ=9.$$

β) Εφόσον το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με *ΑΒ* = *ΑΔ* θα είναι *ΑΔ* = *ΑΒ* = 4. Από πόρισμα του θεωρήματος του Θαλή, κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα (και αντίστροφα). Η ΒΔ είναι παράλληλη με την πλευρά ΓΕ του τριγώνου ΑΓΕ. Άρα χωρίζει τις πλευρές ΑΓ και ΑΕ του τριγώνου ΑΓΕ σε μέρη ανάλογα.

Επομένως: $\frac{ΒΓ}{ΔΕ}=\frac{ΑΒ}{ΑΔ}=\frac{4}{4}=1 \Leftrightarrow ΒΓ=ΔΕ=8$

Οπότε η περίμετρος του τραπεζίου είναι *ΒΔ* + *ΒΓ* + *ΓΕ* + *ΔΕ* = 3 + 8 + 9 + 8 = 28.

19522.Δίνεται το τραπέζιο ΒΓΕΔ του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές ΓΒ και ΕΔ όταν προεκταθούν τέμνονται στο σημείο Α, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Επιπλέον δίνεται ότι $\frac{ΑΔ}{ΑΕ}=\frac{2}{3}$ και ΓΕ = 6 .



α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΔ. (Μονάδες 11)

β) Αν επιπλέον το ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο και ΑΕ= 12:

i. να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.

ii. να υπολογίσετε τα μήκη των υπόλοιπων πλευρών του τριγώνου ΑΒΔ.

(Μονάδες 14)

Λύση

α) Οι ΒΔ και ΓΕ είναι παράλληλες ως βάσεις του τραπεζίου ΒΓΕΔ. Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ΑΒΔ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΓ και ΑΕ του τριγώνου ΑΓΕ και την παράλληλη ΒΔ στην πλευρά ΓΕ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΓΕ οπότε :

$$\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΒΔ}{ΓΕ}=\frac{ΑΔ}{ΑΕ}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{ΒΔ}{6}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3ΒΔ=12 \Leftrightarrow ΒΔ=4$$

β) i. Από πόρισμα του θεωρήματος του Θαλή, κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα (και αντίστροφα). Η ΒΔ είναι παράλληλη με την πλευρά ΓΕ του τριγώνου ΑΓΕ. Άρα χωρίζει τις πλευρές ΑΓ και ΑΕ του ΑΓΕ σε μέρη ανάλογα.

Επομένως: $\frac{ΑΒ}{ΑΔ}=\frac{ΒΓ}{ΔΕ}$.

Εφόσον το ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οι πλευρές του ΒΓ και ΔΕ είναι ίσες. Επομένως:

$\frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{ΒΓ}{ΔΕ} = \frac{ΒΓ}{ΒΓ} = 1 \Leftrightarrow ΑΒ = ΑΔ$

Δηλαδή οι πλευρές ΑΒ και ΑΔ του τριγώνου ΑΒΔ είναι ίσες. Επομένως το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.

ii. Είναι $\frac{ΑΔ}{ΑΕ} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{ΑΔ}{12} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3ΑΔ = 24 \Leftrightarrow ΑΔ = 8$

Εφόσον, από το β)i., το ΑΒΔ είναι ισοσκελές είναι ΑΒ = ΑΔ = 8.

Διαίρεση τμημάτων εσωτερικά και εξωτερικά ως προς δοσμένο λόγο

2ο Θέμα

19516.Το Ε είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ = 12 και ισχύει ότι ΑΓ = ΓΔ = ΔΕ.

α) Ποια είναι τα μήκη των τμημάτων ΑΕ, ΕΒ, ΑΓ, ΓΔ και ΔΕ; **(Μονάδες 12)**

β) Να βρείτε το λόγο $\frac{ΑΕ}{ΕΒ}$. **(Μονάδες 8)**

γ) Να βρείτε το λόγο $\frac{ΑΓ}{ΓΒ}$. **(Μονάδες 5)**

Λύση

α) Είναι $ΑΓ + ΓΔ + ΔΕ = ΑΕ \Leftrightarrow 3ΑΓ = 6 \Leftrightarrow ΑΓ = 2$, εφόσον τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΓΔ και ΔΕ είναι ίσα. Άρα ΑΓ = ΓΔ = ΔΕ = 2.

β) $\frac{ΑΕ}{ΕΒ} = \frac{6}{6} = 1.$

γ) ΓΒ = ΓΔ + ΔΕ + ΕΒ = 2 + 2 + 6 = 10. Ο ζητούμενος λόγος είναι $\frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

22112.Στο παρακάτω σχήμα, το σημείο Γ είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΑΒ. Έστω ότι είναι ΑΒ = 12κ και ΑΓ = 4κ, όπου κ θετικός αριθμός.

α) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{ΑΓ}{ΑΒ}$. **(Μονάδες 5)**

β) Να υπολογίσετε i. το τμήμα ΓΒ συναρτήσει του κ, **(Μονάδες 5)**

ii. το λόγο του τμήματος ΓΒ προς το τμήμα ΑΒ.
(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι το τμήμα ΓΒ είναι διπλάσιο του τμήματος ΑΓ και να βρείτε το λόγο λ στον οποίο το σημείο Γ διαιρεί εσωτερικά το τμήμα ΑΒ. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Έχουμε $\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{4κ}{12κ} = \frac{1}{3}$.

β) i. Είναι ΓΒ = ΑΒ – ΑΓ = 12κ – 4κ = 8κ, αφού ΑΒ = 12κ και ΑΓ = 4κ από τα δεδομένα.

ii. Ο λόγος του τμήματος ΓΒ προς το τμήμα ΑΒ είναι $\frac{ΓΒ}{ΑΒ} = \frac{8κ}{12κ} = \frac{2}{3}$.

γ) $\frac{ΓΒ}{ΑΓ} = \frac{8κ}{4κ} = 2 \Leftrightarrow ΓΒ = 2ΑΓ$. Συνεπώς το τμήμα ΓΒ είναι διπλάσιο του τμήματος ΑΓ.

Ο λόγος λ στον οποίο το σημείο Γ διαιρεί εσωτερικά το τμήμα ΑΒ είναι ο λόγος $\lambda = \frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Gamma A}{2\Gamma A} = \frac{1}{2}$.

22113.Στο παρακάτω σχήμα, το σημείο Γ είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΑΒ.
Αν είναι ΑΒ = 16κ και ΓΒ = 4κ, όπου κ θετικός αριθμός, τότε να υπολογίσετε:

α) το λόγο $\frac{\Gamma B}{AB}$, **(Μονάδες 8)**

β) το τμήμα ΑΓ συναρτήσει του κ και το λόγο του τμήματος ΑΓ προς το τμήμα ΑΒ, **(Μονάδες 10)**

γ) το λόγο λ στον οποίο το σημείο Γ διαιρεί εσωτερικά το τμήμα ΑΒ. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Είναι $\frac{\Gamma B}{AB} = \frac{4\kappa}{16\kappa} = \frac{1}{4}$

β) Είναι ΑΓ = ΑΒ – ΓΒ = 16κ – 4κ = 12κ, οπότε $\frac{A\Gamma}{AB} = \frac{12\kappa}{16\kappa} = \frac{3}{4}$.

γ) Ο λόγος λ στον οποίο το σημείο Γ διαιρεί εσωτερικά το τμήμα ΑΒ είναι ο λόγος $\frac{\Gamma A}{\Gamma B}$, δηλαδή

$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{12\kappa}{4\kappa} = 3$.

22115.Θεωρούμε τμήμα ΑΒ και σημείο Γ το οποίο το διαιρεί εσωτερικά σε δυο τμήματα ΑΓ και ΓΒ σε λόγο $\frac{A\Gamma}{\Gamma B} = \frac{1}{3}$.

α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθένα από το ακόλουθα δύο ερωτήματα, αιτιολογώντας την επιλογή σας.

i. Το τμήμα ΓΒ είναι

Α: ίσο με το τμήμα ΑΓ.
Β: διπλάσιο από το τμήμα ΑΓ.
Γ: τριπλάσιο από το τμήμα ΑΓ.

ii. Το σημείο Γ

Α: είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.
Β: βρίσκεται πιο κοντά στο άκρο Α του τμήματος ΑΒ.
Γ: βρίσκεται πιο κοντά στο άκρο Β του τμήματος ΑΒ.
(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι το τμήμα ΑΒ είναι τετραπλάσιο του τμήματος ΑΓ. **(Μονάδες 8)**

γ) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{\Gamma B}{AB}$. **(Μονάδες 7)**

Λύση

Έστω τμήμα ΑΒ και Γ εσωτερικό του σημείο τέτοιο ώστε $\frac{A\Gamma}{\Gamma B} = \frac{1}{3}$.

α) i. Είναι $\frac{A\Gamma}{\Gamma B} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \Gamma B = 3A\Gamma$. Άρα η σωστή απάντηση είναι η Γ.

ii. Αφού το ΓΒ είναι τριπλάσιο από το ΑΓ, άρα το τμήμα ΓΒ είναι μεγαλύτερο από το τμήμα ΑΓ, οπότε το σημείο Γ θα είναι πιο κοντά στο άκρο Α. Άρα η σωστή απάντηση είναι το Β.

β) Είναι ΑΒ = ΑΓ + ΒΓ = ΑΓ + 3ΑΓ = 4ΑΓ, οπότε $\frac{ΑΓ}{ΑΒ}=\frac{ΑΓ}{4ΑΓ}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow ΑΒ=4ΑΓ$.
Δηλαδή, το τμήμα ΑΒ είναι τετραπλάσιο του τμήματος ΑΓ.

γ) Είναι $\frac{ΓΒ}{ΑΒ}=\frac{3ΑΓ}{4ΑΓ}=\frac{3}{4}$.

4ο Θέμα

19523. Τα σημεία Γ, Δ και Ε είναι σημεία του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, ώστε το Ε να είναι μέσο του ΑΒ και ΑΓ = ΓΔ = ΔΕ.

α) Αν ΑΒ = 12, ποια είναι τα μήκη των τμημάτων ΕΑ και ΑΓ; **(Μονάδες 10)**

β) Να βρείτε το λόγο $\lambda_1=\frac{ΕΑ}{ΕΒ}$.που το σημείο Ε διαιρεί το τμήμα ΑΒ. **(Μονάδες 5)**

γ) Να βρείτε το λόγο $\lambda_2=\frac{ΓΑ}{ΓΒ}$ που το σημείο Γ διαιρεί το τμήμα ΑΒ. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) ΕΑ = ΑΒ: 2 = 6, εφόσον το Ε είναι μέσο του ΑΒ.
$ΑΓ+ΓΔ+ΔΕ=ΑΕ\Leftrightarrow 3ΑΓ=6\Leftrightarrow ΑΓ=2$, εφόσον τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΓΔ και ΔΕ είναι ίσα.

β) ΕΑ = ΕΒ, εφόσον το Ε είναι μέσο του ΑΒ. Άρα $\lambda_1=\frac{ΕΑ}{ΕΒ}=1$.

γ) Ισχύει $ΑΓ+ΓΔ+ΔΕ=ΑΕ\Leftrightarrow 3ΑΓ=ΑΕ$ εφόσον τα τμήματα ΑΓ, ΓΔ και ΔΕ είναι ίσα.
Επίσης $ΕΒ=ΑΕ=3ΑΓ$, άρα $ΓΒ=ΓΔ+ΔΕ+ΕΒ=ΑΓ+ΑΓ+3ΑΓ=5ΑΓ$. Είναι $\lambda_2=\frac{ΓΑ}{ΓΒ}=\frac{1}{5}$.

Ομοιότητα

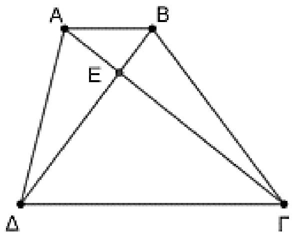
2ο Θέμα

19274.Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ και ΓΔ = 3ΑΒ.
Οι διαγώνιές του ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ε.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΕΓ είναι όμοια.

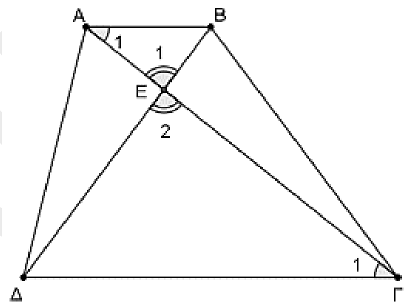
(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{\text{ΕΓ}}{\text{ΕΑ}}$.

(Μονάδες 13)



Λύση



α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ έχουν:

$\text{Α}_1 = \text{Γ}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΑΓ και

$\text{Ε}_1 = \text{Ε}_2$ ως κατακορυφήν γωνίες.

Επομένως είναι όμοια γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

β) Λόγω της ομοιότητας των τριγώνων οι ομόλογες πλευρές τους θα είναι ανάλογες.

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{\text{Ε}}_1 = \hat{\text{Ε}}_2$	$\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Ε} = \text{Γ}\hat{\text{Δ}}\text{Ε}$	$\hat{\text{Α}}_1 = \hat{\text{Γ}}_1$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΕ	ΑΒ	ΕΑ	ΒΕ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΓΔΕ	ΓΔ	ΕΓ	ΔΕ

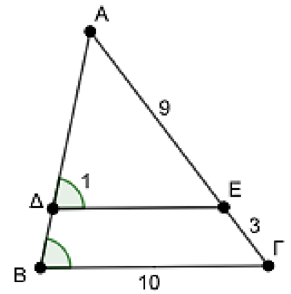
Οπότε: $\frac{\text{ΕΓ}}{\text{ΕΑ}} = \frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{3\text{ΑΒ}}{\text{ΑΒ}} = 3$.

19517.Τα σημεία Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε ΑΕ = 9, ΕΓ = 3 και η γωνία $\text{Δ}_1 = \text{ΑΔΕ}$ είναι ίση με τη γωνία Β του τριγώνου ΑΒΓ.
α) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{3}{4}$.

(Μονάδες 10)



γ) Αν επιπλέον ΒΓ = 10 , να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΔΕ του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 10)

Λύση

α) ΑΓ = ΑΕ + ΕΓ= 9 + 3 = 12.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν κοινή την γωνία Α και $\text{Δ}_1 = \text{Β}$.Επομένως έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, άρα είναι όμοια. Ο λόγος ομοιότητάς τους είναι ίσος με το λόγο των ομόλογων πλευρών τους ΑΕ και ΑΓ, οι οποίες βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες Δ_1 και Β, αντίστοιχα οπότε:

$\lambda = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

γ) Οι πλευρές ΔΕ και ΒΓ είναι ομόλογες, εφόσον βρίσκονται απέναντι από την κοινή γωνία Α .

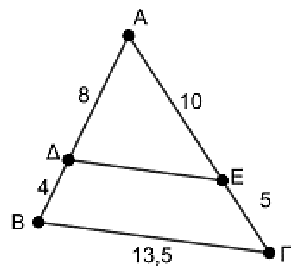
Άρα $\frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{\text{ΔΕ}}{10} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4\text{ΔΕ} = 30 \Leftrightarrow \text{ΔΕ} = \frac{30}{4} = 7{,}5$

19518.Τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε ΑΔ = 8, ΒΔ = 4, ΑΕ = 10 και ΕΓ = 5. Επίσης ΒΓ = 13,5.

α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ. **(Μονάδες 6)**

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{2}{3}$. **(Μονάδες 10)**

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΔΕ του τριγώνου ΑΔΕ. **(Μονάδες 9)**



Λύση

α) ΑΒ = ΑΔ + ΔΒ = 8 + 4 = 12 και ΑΓ = ΑΕ + ΕΓ = 10 + 5 = 15.

β) Έχουμε ότι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ και $\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$. Επίσης η $\hat{Α}$ είναι κοινή γωνία των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ. Άρα τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία σε αυτές τις πλευράς, κοινή. Επομένως είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $λ=\frac{2}{3}$.

γ) Οι πλευρές ΔΕ και ΒΓ είναι ομόλογες πλευρές των όμοιων τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ, εφόσον βρίσκονται απέναντι από την κοινή γωνία τους $\hat{Α}$.

Άρα $\frac{ΔΕ}{ΒΓ}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{ΔΕ}{13,5}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3ΔΕ=27 \Leftrightarrow ΔΕ=9$.

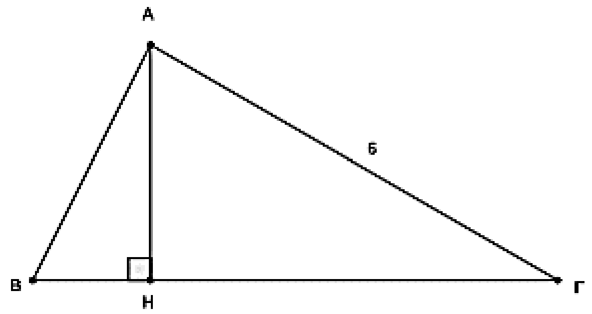
19644.Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ του παρακάτω σχήματος έχουν $\hat{Α}=\hat{Δ}$, $\hat{Β}=\hat{Ε}$ και $\hat{Γ}=\hat{Ζ}$.

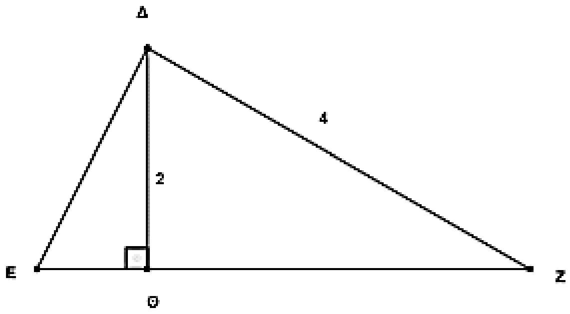
Αν γνωρίζουμε ότι ΑΓ = 6, ΔΖ = 4 και ΔΘ = 2, τότε:

α) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΗΓ και ΔΘΖ είναι όμοια. **(Μονάδες 6)**

β) να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΗ. **(Μονάδες 9)**

γ) να υπολογίσετε το λόγο $\frac{ΗΓ}{ΘΖ}$. **(Μονάδες 10)**





Λύση

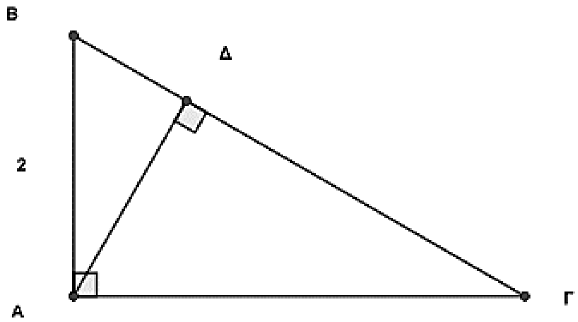
α) Τα τρίγωνα ΑΗΓ και ΔΘΖ είναι όμοια γιατί είναι ορθογώνια και έχουν τη γωνία Γ ίση με τη γωνία Ζ (από υπόθεση).

β) Λόγω του ερωτήματος α) τα τρίγωνα ΑΗΓ και ΔΘΖ θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες άρα ισχύει: $\frac{ΑΗ}{ΘΔ}=\frac{ΑΓ}{ΔΖ} \Leftrightarrow \frac{ΑΗ}{2}=\frac{6}{4} \Leftrightarrow 4ΑΗ=12 \Leftrightarrow ΑΗ=3$

γ) Λόγω του ερωτήματος β) από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΗΓ και ΑΘΖ είναι:

$\frac{ΗΓ}{ΘΖ}=\frac{ΑΓ}{ΔΖ} \Leftrightarrow \frac{ΗΓ}{ΘΖ}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

19645.Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, με την υποτείνουσα του ΒΓ = 4 και την κάθετη πλευρά του ΑΒ = 2.
Αν ΑΔ το ύψος του τριγώνου τότε:
α) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι όμοια.
(Μονάδες 12)
β) να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΔ.
(Μονάδες 13)

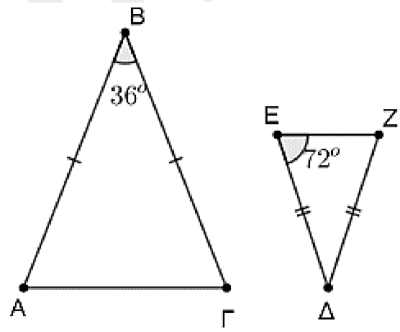


Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι όμοια αφού έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία. Συγκεκριμένα είναι ορθογώνια και η γωνία Β είναι κοινή. Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΑ είναι όμοια.

β) Από το α) και τη ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΒΑ ισχύει:
$$\frac{AB}{\Delta B}=\frac{B\Gamma}{AB}\Leftrightarrow\frac{2}{\Delta B}=\frac{4}{2}\Leftrightarrow 4\Delta B=4\Leftrightarrow \Delta B=1$$

20956.Δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα ΒΑΓ με ΒΑ = ΒΓ και ΔΕΖ με ΔΕ = ΔΖ. Δίνεται επίσης ότι $B=36^\circ$, $E=72^\circ$ και ΑΒ = 2ΔΕ.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. $\Delta=36^\circ$.
(Μονάδες 08)
ii. ΒΓ = 2ΔΖ.
(Μονάδες 08)
β) Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα ΒΑΓ και ΔΕΖ είναι όμοια.
(Μονάδες 09)



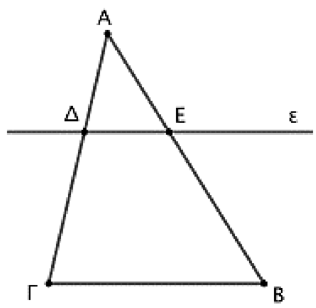
Λύση

α) i. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΕΖ είναι ΔΕ = ΔΖ, άρα $Z=E=72^\circ$.
Για τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΖ είναι: $\Delta+Z+E=180^\circ\Leftrightarrow\Delta+72^\circ+72^\circ=180^\circ\Leftrightarrow\Delta=180^\circ-144^\circ=36^\circ$.

ii. Δίνεται ότι ΑΒ = 2ΔΕ, ΑΒ = ΒΓ και ΔΕ = ΔΖ. Άρα, ΒΓ = 2ΔΕ = 2ΔΖ.

β) Τα τρίγωνα ΒΑΓ και ΔΕΖ έχουν: $\frac{AB}{\Delta E}=\frac{2\Delta E}{\Delta E}=2$, $\frac{B\Gamma}{\Delta Z}=\frac{2\Delta Z}{\Delta Z}=2$ και $B=\Delta=36^\circ$, άρα τα τρίγωνα ΒΑΓ και ΔΕΖ έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, θα είναι όμοια.

21002.Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΓ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε, όπως φαίνεται στο σχήμα.
α) Να αποδείξετε ότι τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΔ είναι όμοια.
(Μονάδες 12)
β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΕ, αν είναι ΑΔ = 2, ΔΓ = 6 και ΒΓ = 4.
(Μονάδες 13)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΔ έχουν $\mathrm{B} = \mathrm{AE}\Delta$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΕΔ και ΒΓ που τέμνονται από την ΕΒ) και κοινή τη γωνία A. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΔ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A} = \hat{A}$	$A\hat{E}\Delta = \hat{B}$	$A\hat{\Delta}E = \hat{\Gamma}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΕΔ	ΔΕ	ΑΔ	ΑΕ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΓ	ΑΒ

Είναι $\frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{\Delta E}{4} = \frac{2}{8} \Leftrightarrow 8\Delta E = 8 \Leftrightarrow \Delta E = 1$

21005.Έστω Δ και Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα τριγώνου ΑΒΓ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί ΔΕ∥ΒΓ.

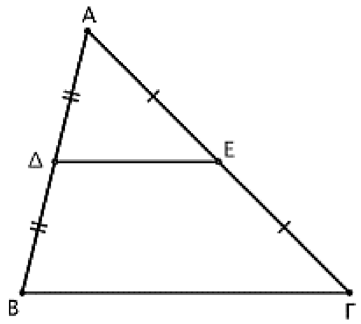
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

γ) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ.

(Μονάδες 05)



Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Επομένως, το ΔΕ είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου, δηλαδή ΔΕ∥ΒΓ.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν $\mathrm{A}\Delta\mathrm{E} = \mathrm{B}$ (ως εκτός εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΒΔ) και κοινή τη γωνία A. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

γ) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A} = \hat{A}$	$A\hat{\Delta}E = \hat{B}$	$A\hat{E}\Delta = \hat{\Gamma}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΕ	ΔΕ	ΑΕ	ΑΔ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΓ	ΑΒ

Έτσι έχουμε: $\frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{A\Delta}{AB}$

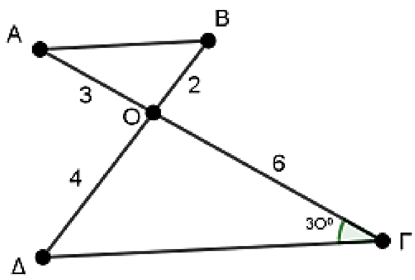
21270.Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν ΟΑ = 3, ΟΒ = 2, ΟΓ = 6, ΟΔ =4 και η γωνία ΟΓΔ ισούται με 30^0 τότε:

α) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι όμοια. (Μονάδες 9)

β) να συμπληρώσετε τα κενά στην ισότητα των λόγων:

$$\frac{OA}{....}=\frac{....}{O\Delta}=\frac{AB}{....}.$$ **(Μονάδες 7)**

γ) να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΟΑΒ. (Μονάδες 9)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ έχουν: $\frac{OA}{O\Gamma}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\frac{OB}{O\Delta}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, άρα $\frac{OA}{O\Gamma}=\frac{OB}{O\Delta}$. Επειδή $\hat{AOB}=\hat{\Gamma O\Delta}$ ως κατακορυφήν, τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, οπότε είναι όμοια.

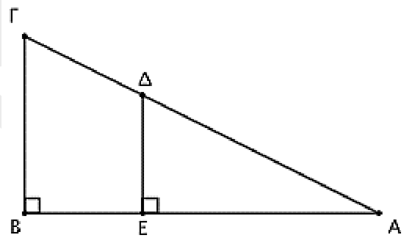
β) Λόγω του ερωτήματος (α) τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι όμοια, οπότε οι λόγοι των ομολόγων πλευρών τους θα είναι ίσοι. Δηλαδή: $\frac{OA}{O\Gamma}=\frac{OB}{O\Delta}=\frac{AB}{\Gamma\Delta}$.

γ) Λόγω του ερωτήματος (α) τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι όμοια, οπότε οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ομόλογες πλευρές τους ΟΒ και ΟΔ θα είναι ίσες. Άρα $\hat{OAB}=\hat{O\Gamma\Delta}=30^\circ$.

21305.Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{AE\Delta}$ είναι ορθές.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΕΔ και ΑΒΓ. (Μονάδες 12)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ έχουν $\hat{B}=\hat{AE\Delta}=90^\circ$ και κοινή τη γωνία $\hat{A}$.
Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A}=\hat{A}$	$\hat{AE\Delta}=\hat{B}$	$\hat{A\Delta E}=\hat{\Gamma}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΕΔ	ΔΕ	ΑΔ	ΑΕ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΓ	ΑΒ

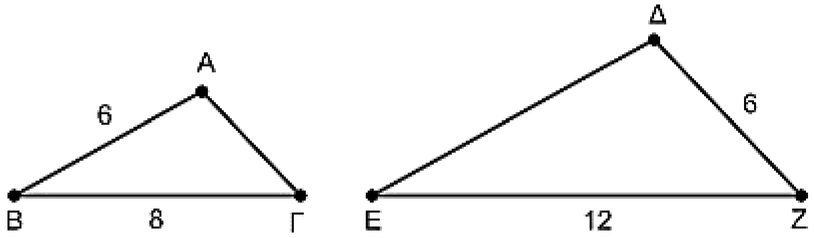
Έτσι έχουμε: $\frac{\Delta E}{B\Gamma}=\frac{A\Delta}{A\Gamma}=\frac{AE}{AB}$.

21390.Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ στο παρακάτω σχήμα είναι όμοια και η ομόλογη πλευρά της ΒΓ είναι η ΕΖ. Δίνονται επίσης ΑΒ = 6, ΒΓ = 8, ΔΖ = 6 και ΕΖ = 12.

α) Να αποδείξετε ότι ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι $\frac{2}{3}$. (Μονάδες 8)

β) Να συμπληρώσετε τα κενά στην ισότητα των λόγων $\frac{AB}{....}=\frac{....}{EZ}=\frac{A\Gamma}{....}$. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών ΑΓ και ΔΕ. **(Μονάδες 10)**



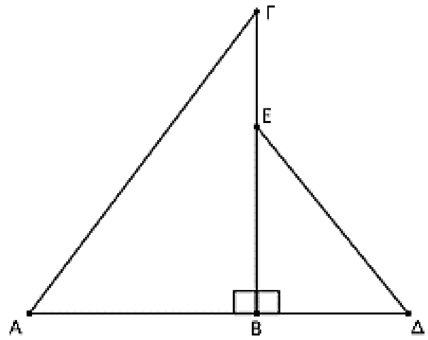
Λύση

α) Επειδή οι πλευρές ΒΓ και ΕΖ είναι ομόλογες, ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι $\lambda = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

β) Είναι $\lambda = \frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$.

γ) Είναι $\frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \lambda \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{6} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3A\Gamma = 12 \Leftrightarrow A\Gamma = 4$, $\frac{AB}{\Delta E} = \lambda \Leftrightarrow \frac{6}{\Delta E} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2\Delta E = 18 \Leftrightarrow \Delta E = 9$

22241.Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι $A = \Delta$.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ είναι όμοια.
(Μονάδες 13)
β) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΒΕ.
(Μονάδες 10)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ έχουν:

- $A = \Delta$ (υπόθεση)
- $AB\Gamma = EB\Delta = 90^\circ$

Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

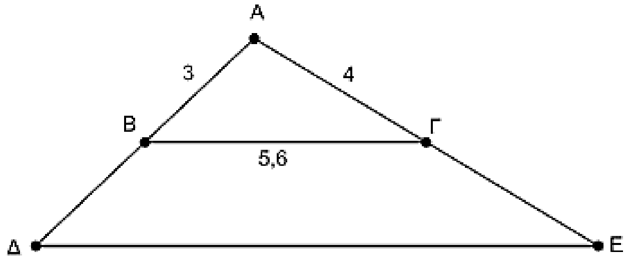
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A} = \hat{\Delta}$	$A\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{B}E$	$A\hat{\Gamma}B = \Delta\hat{E}B$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΓ	ΑΒ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΔΒΕ	ΒΕ	ΕΔ	ΒΔ

Άρα $\frac{B\Gamma}{BE} = \frac{A\Gamma}{E\Delta} = \frac{AB}{B\Delta}$

4ο Θέμα

18208.Η πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ είναι παράλληλη στην πλευρά ΔΕ του τριγώνου ΑΔΕ. Επίσης δίνονται ΑΒ = 3, ΒΓ = 5,6 και ΑΓ = 4.



α) Αν ΑΔ = 6 να υπολογίσετε:

i. το μήκος της πλευράς ΑΕ του τριγώνου ΑΔΕ. **(Μονάδες 09)**

ii. το μήκος της πλευράς ΔΕ του τριγώνου ΑΔΕ. **(Μονάδες 08)**

β) Αν ΑΔ = 9 να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΔΕ του τριγώνου ΑΔΕ. **(Μονάδες 08)**

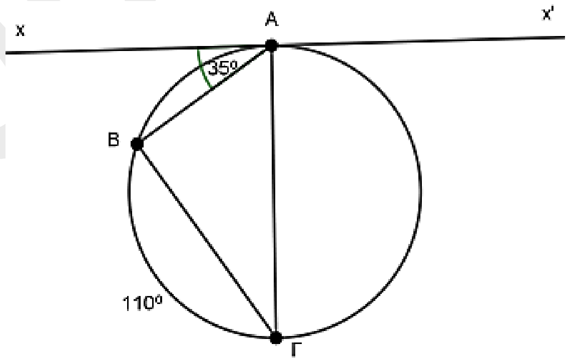
Λύση

α) i. Εφόσον ΑΒ = 3 και ΑΔ = 6, το σημείο Β είναι το μέσο της πλευράς ΑΔ του ΑΔΕ.
Η ΒΓ είναι παράλληλη στη ΔΕ, άρα το σημείο Γ είναι το μέσο της πλευράς ΑΕ του τριγώνου ΑΔΕ.
Επομένως ΑΕ = 2 · ΑΓ = 2 · 4 = 8.

ii. Εφόσον το τμήμα ΒΓ ενώνει τα Β και Γ, μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΕ του τριγώνου ΑΔΕ, είναι $\text{ΒΓ} = \frac{\text{ΔΕ}}{2} \Leftrightarrow \text{ΔΕ} = 2\text{ΒΓ} = 2 \cdot 5,6 = 11,2$.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια, οπότε $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΒΓ}} \Rightarrow \frac{9}{3} = \frac{\text{ΔΕ}}{5,6} \Leftrightarrow 3 = \frac{\text{ΔΕ}}{5,6} \Leftrightarrow \text{ΔΕ} = 16,8$

21015.Στο διπλανό σχήμα η xx' είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α και επιπλέον ισχύουν:
$\text{ΒΑx} = 35^\circ$ και $\text{ΒΓ} = 110^\circ$.



α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας Γ. **(Μονάδες 10)**

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ. **(Μονάδες 10)**

γ) Να αποδείξετε ότι η χορδή ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου. **(Μονάδες 5)**

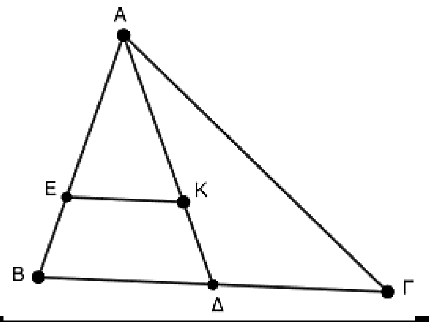
Λύση

α) Η γωνία ΒΑx είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η γωνία Γ είναι η εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής, επομένως θα είναι ίσες, άρα $\text{ΒΑx} = \text{Γ} = 35^\circ$.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, η γωνία του Α είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο, που βαίνει στο τόξο ΒΓ. Άρα το μέτρο της θα ισούται με το μισό του του μέτρου του τόξου στο οποίο βαίνει. Δηλαδή $\text{Α} = \frac{1}{2}\text{ΒΓ} = \frac{1}{2} \cdot 110^\circ = 55^\circ$.

γ) Η χορδή ΑΓ θα είναι διάμετρος του κύκλου αν η εγγεγραμμένη γωνία ΑΒΓ είναι ορθή. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\text{Α} + \text{Γ} = 55^\circ + 35^\circ = 90^\circ$ οπότε $\text{Β} = 90^\circ$, επομένως η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου.

21021.Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, η ΑΔ είναι διάμεσος και το σημείο Κ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου. Από το Κ φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Δίνεται ότι η ΑΒ = 6.



α) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{ΑΚ}{ΑΔ}$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΚ και ΑΒΔ είναι όμοια. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του ΑΕ. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Το βαρύκεντρο ενός τριγώνου απέχει από την κορυφή τα 2/3 της αντίστοιχης διαμέσου, οπότε $ΑΚ = \frac{2}{3}ΑΔ \Leftrightarrow \frac{ΑΚ}{ΑΔ} = \frac{2}{3}$.

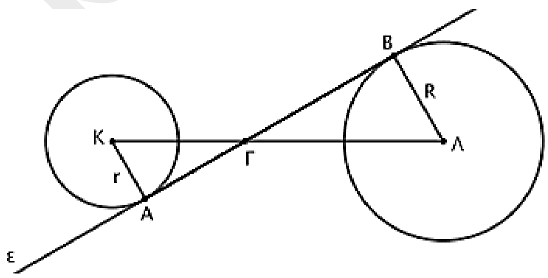
β) Από τα δεδομένα η ΕΚ // ΒΔ οπότε τα τρίγωνα ΑΕΚ και ΑΒΔ έχουν:

- $\widehat{ΑΕΚ} = \widehat{ΑΒΔ}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΕΚ, ΒΔ που τέμνονται από την ΑΒ.
- $\widehat{ΑΚΕ} = \widehat{ΑΔΒ}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΚΕ, ΔΒ που τέμνονται από την ΑΔ.

Δηλαδή τα δύο τρίγωνα έχουν από δύο γωνίες ίσες μία προς μία, επομένως είναι όμοια.

γ) Λόγω του ερωτήματος (β), τα τρίγωνα ΑΕΚ και ΑΒΔ είναι όμοια, άρα θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες οπότε θα ισχύει: $\frac{ΑΕ}{ΑΒ} = \frac{ΑΚ}{ΑΔ} \Leftrightarrow \frac{ΑΕ}{6} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3ΑΕ = 12 \Leftrightarrow ΑΕ = 4$.

20880.Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στους κύκλους (Κ, r) και (Λ,R) στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω Γ το σημείο τομής της διακέντρου ΚΛ και της ευθείας (ε).



α) Να αιτιολογήσετε ότι οι γωνίες $\widehat{ΚΑΓ}$ και $\widehat{ΛΒΓ}$ είναι ορθές. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΑΓ και ΛΒΓ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

γ) Ποια είναι η θέση του σημείου Γ στη διάκεντρο ΚΛ όταν η ακτίνα R είναι διπλάσια της ακτίνας r; (Μονάδες 05)

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι κάθετη στην ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής. Οπότε, ΚΑ ⊥ ΑΒ και ΛΒ ⊥ ΑΒ. Άρα, οι γωνίες $\widehat{ΚΑΓ}$ και $\widehat{ΛΒΓ}$ είναι ορθές.

β) Τα τρίγωνα ΚΑΓ και ΛΒΓ έχουν $\widehat{ΚΓΑ} = \widehat{ΛΓΒ}$ (ως κατακορυφήν) και $\widehat{ΚΑΓ} = \widehat{ΛΒΓ} = 90^\circ$.
Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

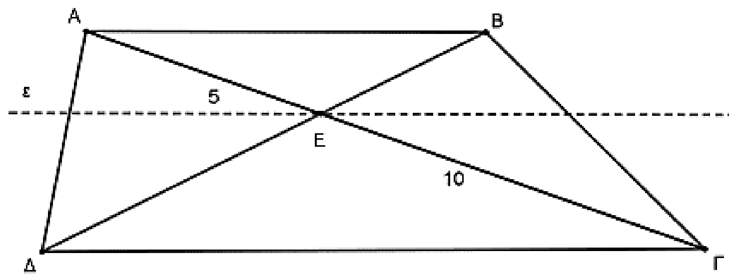
γ) Τα τρίγωνα ΚΑΓ και ΛΒΓ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.
Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\widehat{ΚΓΑ} = \widehat{ΛΓΒ}$	$\widehat{ΚΑΓ} = \widehat{ΛΒΓ}$	$\widehat{ΑΚΓ} = \widehat{ΒΛΓ}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΚΑΓ	ΚΑ	ΚΓ	ΑΓ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΛΒΓ	ΛΒ	ΛΓ	ΒΓ

Έτσι έχουμε: $\frac{ΚΑ}{ΛΒ} = \frac{ΚΓ}{ΛΓ} \Leftrightarrow \frac{r}{R} = \frac{ΚΓ}{ΛΓ} \Leftrightarrow \frac{r}{2r} = \frac{ΚΓ}{ΛΓ} \Leftrightarrow \frac{ΚΓ}{ΛΓ} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow ΛΓ = 2ΚΓ$.

Επομένως, το σημείο Γ διαιρεί εσωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ σε λόγο ½.

21842.Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και Ε το σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ . Αν ΑΕ=5 και ΕΓ=10 :



α) Να αποδείξετε ότι $\frac{BE}{E\Delta}=\frac{1}{2}$.
(Μονάδες 8)

β) Αν ΒΔ = 12 να βρείτε το μήκος των τμημάτων ΒΕ και ΔΕ. (Μονάδες 10)

γ) Να δικαιολογήσετε ότι $\frac{AB}{\Delta\Gamma}=\frac{1}{2}$. (Μονάδες 7)

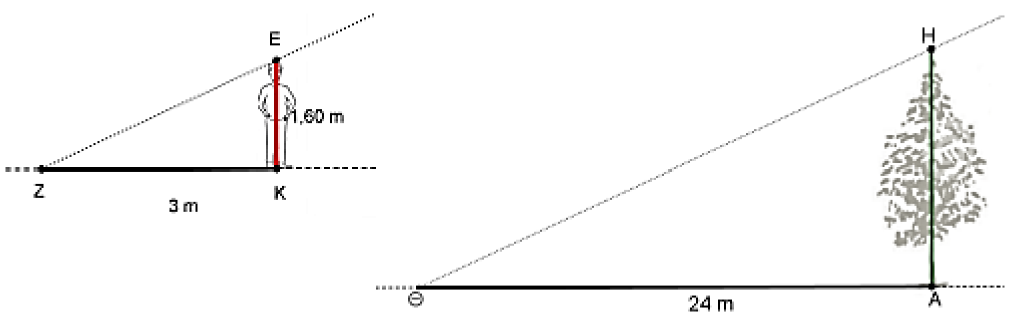
Λύση

α) Οι παράλληλες ευθείες ΑΒ//ε//ΔΓ τέμνονται από τις ευθείες ΑΓ και ΒΔ . Από το θεώρημα του Θαλή είναι $\frac{BE}{AE}=\frac{E\Delta}{E\Gamma}\Leftrightarrow\frac{BE}{E\Delta}=\frac{AE}{E\Gamma}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

β) Είναι $\frac{BE}{E\Delta}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow E\Delta=2BE$ και $B\Delta=12\Leftrightarrow BE+E\Delta=12\Leftrightarrow BE+2BE=12\Leftrightarrow 3BE=12\Leftrightarrow BE=4$ άρα $E\Delta=2\cdot 4=8$.

γ) Σύμφωνα με το Θεώρημα του Θαλή είναι $\frac{AE}{BE}=\frac{E\Gamma}{E\Delta}\Leftrightarrow\frac{AE}{E\Gamma}=\frac{BE}{E\Delta}$. Ακόμη $AEB=\Gamma E\Delta$ ως κατακορυφήν, άρα τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, επομένως είναι όμοια. Άρα $\frac{AB}{\Delta\Gamma}=\frac{AE}{E\Gamma}=\frac{1}{2}$.

22246.Το φως όταν κινείται μέσα σε ομογενή υλικά, διαδίδεται ευθύγραμμα και για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε ευθείες γραμμές (φωτεινές ακτίνες) για να αναπαραστήσουμε το ίχνος της διαδρομής του. Όταν η πηγή του φωτός βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση, όπως ο ήλιος, οι φωτεινές ακτίνες θεωρούνται παράλληλες μεταξύ τους. Ένας άνθρωπος ύψους 1,6m ρίχνει κάποια στιγμή σκιά μήκους 3m. Την ίδια χρονική στιγμή και πάνω στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο ένα δέντρο ρίχνει σκιά μήκους 24m.
Τα σχέδια της εικόνας που ακολουθεί αναπαριστάνουν τις δυο περιπτώσεις. Να θεωρήσετε ότι οι ΖΕ και ΘΗ αναπαριστάνουν τις φωτεινές ακτίνες του ήλιου και είναι παράλληλες μεταξύ τους, τα τμήματα ΚΖ, ΑΘ αναπαριστάνουν τις σκιές του δέντρου και του ανθρώπου και είναι παράλληλα μεταξύ τους και, τα δε τμήματα ΚΕ, ΑΗ αναπαριστάνουν τα αντίστοιχα ύψη τους, τα οποία είναι κάθετα στα ΚΖ, ΑΘ.
α) i. Είναι όμοια τα τρίγωνα ΖΚΕ και ΘΑΗ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)
ii. Να βρείτε το ύψος του δέντρου. (Μονάδες 10)



(Σημειώνεται ότι τα σχέδια δεν έχουν γίνει υπό κλίμακα)
β) Η γραπτή λύση που έδωσε ένας μαθητής στο ερώτημα α)i. είναι η ακόλουθη:

«Τα δύο τρίγωνα ΚΖΕ και ΑΘΗ είναι όμοια γιατί είναι ορθογώνια».
Ο καθηγητής του μαθητή του είπε ότι ο συλλογισμός του έχει λάθος. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή; **(Μονάδες 5)**

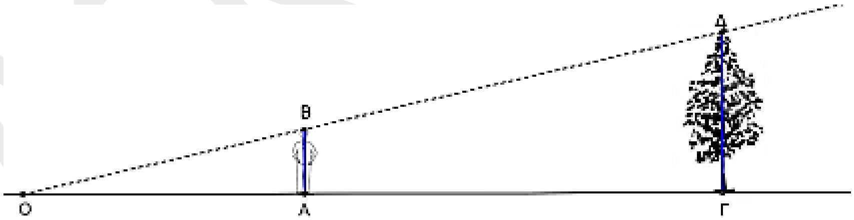
Λύση

α) i. Από τα δεδομένα έχουμε ότι τα τμήματα ΚΕ και ΑΗ είναι κάθετα στα τμήματα ΚΖ και ΑΘ αντίστοιχα, άρα $\hat{K} = \hat{A} = 90^\circ$. Οπότε η ακτίνα ΖΕ του ήλιου, το ύψος ΚΕ και η σκιά ΚΖ του ανθρώπου σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο ΖΚΕ με $\hat{K} = 90^\circ$, αλλά και η ακτίνα ΘΗ του ήλιου, το ύψος ΑΗ και η σκιά ΑΘ του δέντρου σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο ΘΑΗ με $\hat{A} = 90^\circ$.
Από τα δεδομένα έχουμε ότι οι ΖΕ και ΘΗ είναι παράλληλες μεταξύ τους, όπως και οι ΚΖ, ΑΘ είναι παράλληλες μεταξύ τους, οπότε θα είναι $\hat{Z} = \hat{\Theta}$, ως οξείες γωνίες με πλευρές παράλληλες. Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΚΕ και ΘΑΗ είναι όμοια, γιατί έχουν μια οξεία γωνία τους ίση.

ii. Αφού τα τρίγωνα ΖΚΕ και ΘΑΗ είναι όμοια, θα έχουν και τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή θα ισχύει: $\frac{AH}{KE} = \frac{A\Theta}{KZ} = \frac{\Theta H}{ZE} \Rightarrow \frac{AH}{1,6} = \frac{24}{3} \Leftrightarrow \frac{AH}{1,6} = 8 \Leftrightarrow AH = 8 \cdot 1,6 = 12,8$.
Άρα το ύψος του δέντρου είναι 12,8 m.

β) Ο μαθητής συμπεραίνει ότι τα τρίγωνα είναι όμοια με επιχείρημα ότι είναι ορθογώνια χωρίς να τεκμηριώνει το γιατί είναι ορθογώνια καθώς και τα στοιχεία εκείνα που αποτελούν τις προϋποθέσεις κριτηρίου για την ομοιότητα δύο ορθογωνίων τριγώνων, όπως αυτό της ισότητας μιας οξείας γωνίας τους.

22247.Ένα δέντρο ρίχνει κάποια στιγμή σε οριζόντιο έδαφος σκιά ΓΟ μήκους 12 m. Την ίδια στιγμή, ένας μαθητής, ύψους 1,75 m, για να βρει το ύψος του δέντρου στέκεται σε ένα σημείο πάνω στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο έτσι ώστε, η σκιά του ΑΟ και η σκιά ΓΟ του δέντρου να βρίσκονται στην ίδια ευθεία και να έχουν το ίδιο άκρο Ο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Ο μαθητής μετράει τη σκιά του εκείνης της χρονικής στιγμής και βρίσκει ότι έχει μήκος 2 m. Να θεωρήσετε ότι τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ του σχεδίου αναπαριστάνουν τα ύψη του μαθητή και του δέντρου αντίστοιχα και ότι είναι κάθετα στην ΟΓ.
α) i. Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι όμοια. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 10)**
ii. Να βρείτε το ύψος του δέντρου. **(Μονάδες 10)**



(σημειώνεται ότι τα σχέδια δεν έχουν γίνει υπό κλίμακα)
β) Η γραπτή λύση που έδωσε ένας μαθητής στο ερώτημα α)ii. είναι η παρακάτω.
«α)ii. $\frac{AB}{OA} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma A} \Leftrightarrow \frac{1,75}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{12-2} \Leftrightarrow 2\Gamma\Delta = 1,75 \cdot 10 \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \frac{17,5}{2} = 8,75\text{m}$ **». Είναι η λύση του μαθητή σωστή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.** **(Μονάδες 5)**

[Σημείωση: Όταν το φως κινείται μέσα σε ομογενή υλικά, διαδίδεται ευθύγραμμα και σχηματίζει αυτό που περιγράφεται ως φωτεινή ακτίνα. Όταν οι φωτεινές ακτίνες συναντήσουν στην πορεία τους αδιαφανές εμπόδιο, πίσω από το εμπόδιο δημιουργείται μια περιοχή που δεν φωτίζεται απευθείας από τις ακτίνες, την οποία περιοχή αναγνωρίζουμε ως σκιά. Όταν η πηγή του φωτός βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση, όπως ο ήλιος, οι φωτεινές ακτίνες θεωρούνται παράλληλες μεταξύ τους]

Λύση

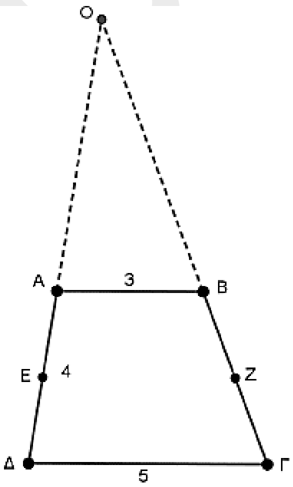
α) i. Από τα δεδομένα έχουμε ότι τα τμήματα ΑΒ, ΓΔ που αναπαριστάνουν τα ύψη του μαθητή και του δέντρου αντίστοιχα είναι κάθετα στην ΟΓ. Οπότε τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ορθογώνια με $OAB = O\Gamma\Delta = 90^\circ$ και έχουν την οξεία γωνία O κοινή, άρα θα είναι όμοια γιατί ως ορθογώνια έχουν μια οξεία γωνίας τους ίση.

ii. Αφού τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι όμοια θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή ισχύει: $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{OB}{O\Delta} = \frac{OA}{O\Gamma} \Rightarrow \frac{1,75}{\Gamma\Delta} = \frac{2}{12} \Leftrightarrow 2\Gamma\Delta = 1,75 \cdot 12 = 10,5$
Άρα το ύψος του δέντρου είναι 10,5 m.

β) Στο ερώτημα α)ii στη γραπτή του λύση ο μαθητής χρησιμοποιεί λάθος αναλογία μεταξύ των πλευρών των όμοιων τριγώνων, και ως εκ τούτου η λύση του χαρακτηρίζεται «λάθος».

3ο Θέμα

21014.Στο διπλανό σχήμα δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ και Ε, Ζ τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών του ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα. Αν ΑΒ = 3, ΔΓ = 5,
ΑΔ = 4 και οι μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ, ΒΓ τέμνονται στο Ο, τότε:
α) να υπολογίσετε το μήκος του ΕΖ.
(Μονάδες 9)
β) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΕΖ είναι όμοια.
(Μονάδες 9)
γ) να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΟΑ.
(Μονάδες 7)



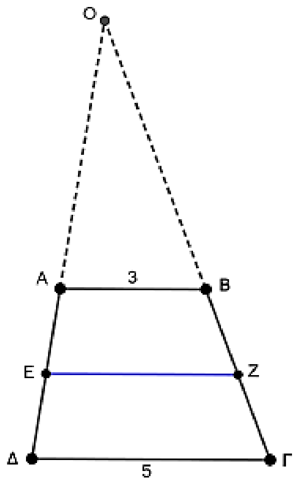
Λύση

α) Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ τα Ε, Ζ είναι τα μέσα των δύο μη παραλλήλων πλευρών, οπότε η ΕΖ θα είναι η διάμεσός του. Άρα θα ισούται με το ημιάθροισμα των δύο βάσεων. Δηλαδή $EZ = \frac{AB + \Delta\Gamma}{2} = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

β) Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος ενός τραπεζίου είναι παράλληλη στις βάσεις του, άρα η ΑΒ // ΕΖ οπότε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΕΖ έχουν:

- $OAB = OEZ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΕΖ που τέμνονται από την ΟΕ.
- $OBA = OZE$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΒΑ, ΖΕ που τέμνονται από την ΟΖ.

Δηλαδή τα δύο τρίγωνα έχουν από δύο γωνίες ίσες μία προς μία, επομένως είναι όμοια.

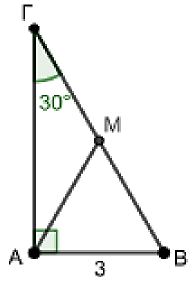


γ) Λόγω του ερωτήματος (β), τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΕΖ είναι όμοια, άρα θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες οπότε θα ισχύει:
$\frac{OA}{OE} = \frac{AB}{EZ}$ (1).
Από τα δεδομένα η ΑΒ = 3 και λόγω του ερωτήματος (α) η ΕΖ = 4. Το Ε είναι μέσο της ΑΔ και η ΑΔ = 4, οπότε το ΑΕ = 2. Έτσι το ΟΕ = ΟΑ + ΑΕ = ΟΑ + 2.

Επομένως η (1) γράφεται: $\frac{OA}{OA+2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4OA = 3OA + 6 \Leftrightarrow 4OA - 3OA = 6 \Leftrightarrow OA = 6$

Πυθαγόρειο Θεώρημα

2ο Θέμα



18203.Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $A = 90^\circ$, $\Gamma = 30^\circ$ και ΑΒ = 3.
Το Μ είναι μέσο της υποτείνουσας του ΑΒΓ.
α) Να αποδείξετε ότι ΒΓ = 6.

(Μονάδες 08)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΜ.

(Μονάδες 09)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της κάθετης πλευράς ΑΓ του ΑΒΓ.

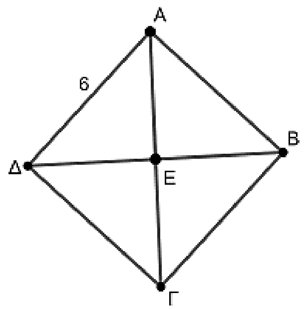
(Μονάδες 08)

Λύση

α) Επειδή $\Gamma = 30^\circ$ η απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας Γ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας του ΑΒΓ. Άρα $AB = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2AB = 6$.

β) Το ΑΜ ενώνει την κορυφή Α της ορθής γωνίας του ΑΒΓ με το μέσο Μ της υποτείνουσας. Άρα η ΑΜ είναι η διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Επομένως η ΑΜ ισούται με το μισό της ΒΓ. Άρα ΑΜ = 3.

γ) Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:
$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2 \Leftrightarrow A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27 \Leftrightarrow A\Gamma = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$



18207.Το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο με περίμετρο 24 και ΑΔ = 6.
α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του ΑΒΓΔ και να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 13)

β) Αν επιπλέον $A\Gamma = 6\sqrt{2}$ να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Σε κάθε παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές τους ανά δύο είναι ίσες. Επομένως στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ΑΔ = ΒΓ και ΑΒ = ΓΔ. Άρα ΒΓ = ΑΔ = 6.
Η περίμετρος του ΑΒΓΔ είναι 24, άρα ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΑΔ = 24 ⇔ 12 + ΑΒ + ΓΔ = 24 ή ΑΒ + ΓΔ = 12.
Όμως ΑΒ = ΓΔ, άρα ΑΒ = ΓΔ = 12: 2 = 6.
Το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, γιατί ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΑΔ = 6, δηλαδή έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

β) Στο τρίγωνο ΑΓΔ είναι $A\Gamma^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 72$ και $A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2 = 6^2 + 6^2 = 36 + 36 = 72$, άρα $A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2 = A\Gamma^2$.Σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος το ΑΓΔ είναι ορθογώνιο τρίγωνο με $\Delta = 90^\circ$. Άρα ο ρόμβος ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, εφόσον μια γωνία του είναι ορθή.

18306.Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα R = 1. Θεωρούμε το εφαπτόμενο τμήμα ΒΑ ώστε $OBA = 30^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε ότι η γωνία OAB είναι ορθή.

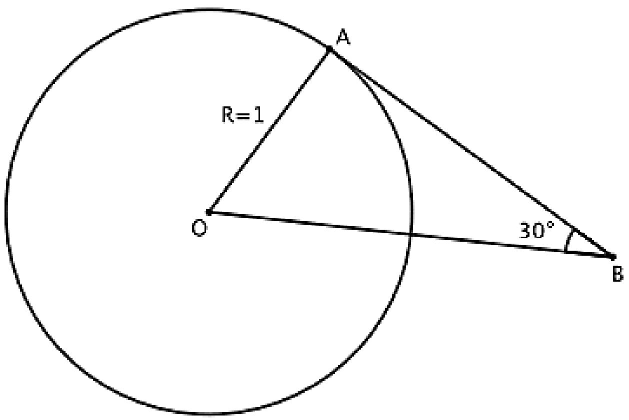
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ΟΒ = 2.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος ΒΑ.

(Μονάδες 5)



Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι κάθετη στην ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής, οπότε $BA \perp OA$. Άρα, η γωνία OAB είναι ορθή.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ είναι $OBA = 30^\circ$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά ΟΑ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΟΒ. Έτσι έχουμε $OA = \dfrac{OB}{2}$.

Οπότε: $OB = 2OA = 2 \cdot 1 = 2$

γ) Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ έχουμε:

$BA^2 = OB^2 - OA^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 \Leftrightarrow BA = \sqrt{3}$

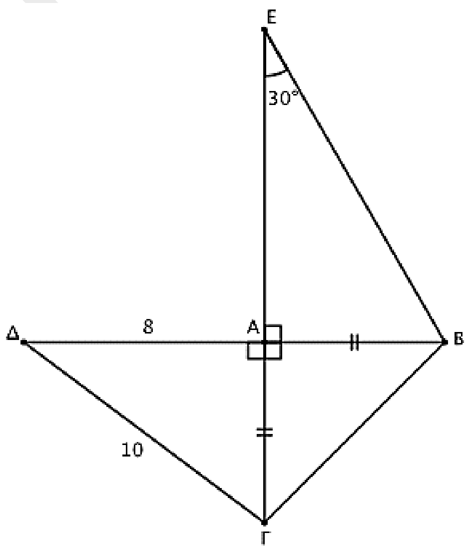
18314.Στο σχήμα δίπλα είναι ΑΒ = ΑΓ, ΑΔ = 8, ΔΓ = 10 και $AEB = 30^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΓ = 6.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την υποτείνουσα ΒΕ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΕ.

(Μονάδες 12)



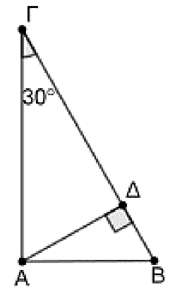
Λύση

α) Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$A\Gamma^2 = \Delta\Gamma^2 - A\Delta^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \Leftrightarrow A\Gamma = \sqrt{36} = 6$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ είναι $AEB = 30^\circ$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά ΑΒ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΒΕ. Έτσι έχουμε: $AB = \dfrac{BE}{2} \Leftrightarrow BE = 2AB = 12$.

19272. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\mathrm{A}=90^{\circ}\right)$ με ΒΓ = 8 και $\Gamma = 30^{\circ}$.



α) Να αποδείξετε ότι ΑΒ = 4.

(Μονάδες 12)

β) Φέρουμε το ύψος ΑΔ. Να υπολογίσετε το τμήμα ΒΔ.

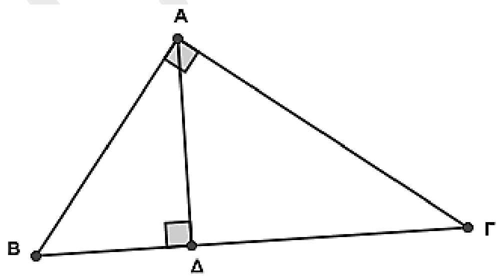
(Μονάδες 13)

Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\Gamma = 30^{\circ}$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά ΑΒ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΒΓ, δηλαδή: $\mathrm{AB}=\dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}=4$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, το τετράγωνο της κάθετης πλευράς ΑΒ ισούται με το γινόμενο της υποτείνουσας ΒΓ επί την προβολή της κάθετης πλευράς ΑΒ στην υποτείνουσα, δηλαδή την ΒΔ. Οπότε: $\mathrm{AB}^2=\mathrm{B\Gamma}\cdot \mathrm{B\Delta} \Leftrightarrow 4^2=8\cdot \mathrm{B\Delta} \Leftrightarrow 8\mathrm{B\Delta}=16 \Leftrightarrow \mathrm{B\Delta}=2$.

19646.Το τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος είναι ορθογώνιο με $\mathrm{A}=90^{\circ}$, ΒΓ = 10 και ΑΓ=8. Αν ΑΔ είναι το ύψος του από την κορυφή Α να υπολογίσετε το μήκος:



α) της πλευράς ΑΒ.

(Μονάδες 10)

β) του τμήματος ΔΓ.

(Μονάδες 10)

γ) του τμήματος ΔΒ.

(Μονάδες 5)

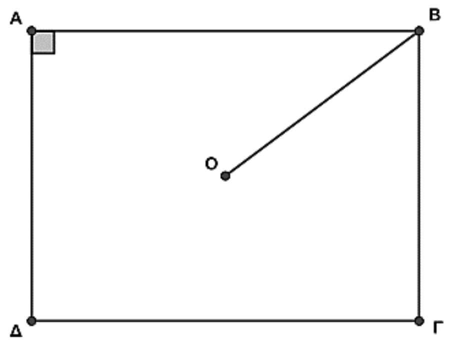
Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:
$\mathrm{AB}^2=\mathrm{B\Gamma}^2-\mathrm{A\Gamma}^2=10^2-8^2=100-64=36 \Leftrightarrow \mathrm{AB}=\sqrt{36}=6$

β) Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\mathrm{A\Gamma}^2=\mathrm{B\Gamma}\cdot\Delta\Gamma \Leftrightarrow 8^2=10\Delta\Gamma \Leftrightarrow \Delta\Gamma=\dfrac{64}{10}=6,4$

γ) Λόγω του ερωτήματος β) είναι: ΔΒ = ΒΓ – ΔΓ = 10 – 6,4 = 3,6.

19647.Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος το σημείο Ο είναι το κέντρο του. Επίσης η ΟΒ = 5 και η ΑΔ = 6.



α) Να υπολογίσετε το μήκος της ΒΔ.

(Μονάδες 10)

β) Πόσο είναι το μήκος της διαγωνίου ΑΓ;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΒ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

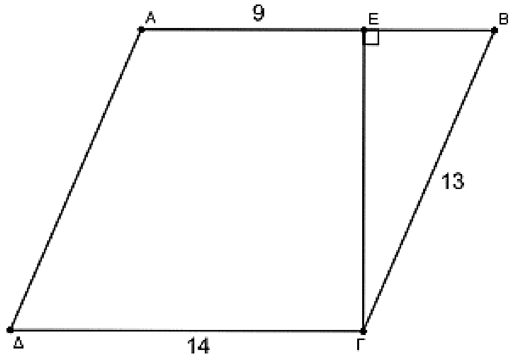
(Μονάδες 10)

Λύση

α) Επειδή το Ο είναι το μέσο της διαγωνίου ΒΔ, ισχύει ότι ΒΔ = 2·ΟΒ = 2·5 = 10.

β) Σε κάθε ορθογώνιο οι διαγώνιες είναι ίσες μεταξύ τους, συνεπώς ΑΓ = ΒΔ = 10.
γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$AB^2 = B\Delta^2 - A\Delta^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 \Leftrightarrow AB = \sqrt{64} = 8$

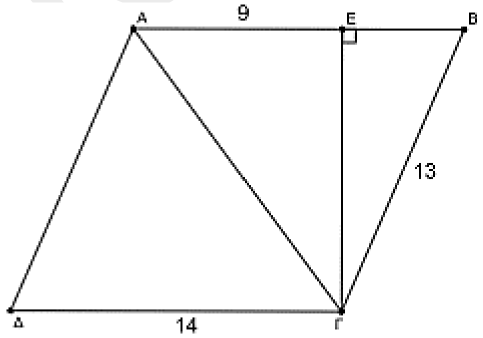
20083.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ=13 και ΓΔ=14. Αν ΓΕ είναι το κάθετο τμήμα από το σημείο Γ στην πλευρά ΑΒ και το τμήμα ΑΕ έχει μήκος 9, να αποδείξετε ότι:
α) Το μήκος του τμήματος ΓΕ είναι 12.
(Μονάδες 10)
β) Τα μήκη των πλευρών ΑΔ, ΔΓ και ΑΓ του τριγώνου ΑΔΓ είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί.
(Μονάδες 15)



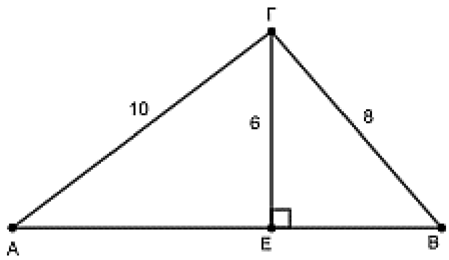
Λύση

α) ΑΒ = ΓΔ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Για το μήκος ΒΕ έχουμε:
ΒΕ = ΑΒ – ΑΕ = 14 – 9 = 5.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΒ εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$\Gamma E^2 = B\Gamma^2 - BE^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Leftrightarrow \Gamma E = \sqrt{144} = 12$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΓ εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα για την υποτείνουσα του ΑΓ, έχουμε:
$A\Gamma^2 = AE^2 + \Gamma E^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 \Leftrightarrow$
$\Gamma E = \sqrt{225} = 15$, άρα ΑΓ=15.
Η πλευρά ΑΔ του τριγώνου ΑΔΓ είναι ίση με την πλευρά ΒΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, οπότε ΑΔ=13.
Η πλευρά ΔΓ είναι ίση 14 από την υπόθεση και αποδείξαμε ότι ΑΓ=15. Επομένως, τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΔΓ είναι οι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί 13, 14 και 15.



20085.Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος δίνεται ότι, ΑΓ=10 και ΒΓ=8. Το τμήμα ΓΕ είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΑΒ με ΓΕ=6.
α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:
Το τμήμα ΑΕ ονομάζεται προβολή της πλευράς ...... στην πλευρά ......
Το τμήμα .... είναι η προβολή της πλευράς ΒΓ στην πλευρά ....
(Μονάδες 08)



β) i. Να υπολογίσετε το τμήμα ΑΕ. (Μονάδες 08)
ii. Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΒ. (Μονάδες 09)

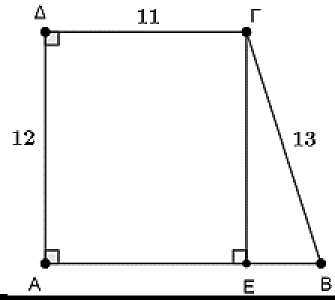
Λύση

α) Το τμήμα ΑΕ ονομάζεται προβολή της πλευράς **ΑΓ** στην πλευρά **ΑΒ**.
Το τμήμα **ΒΕ** είναι η προβολή της πλευράς ΒΓ στην πλευρά **ΑΒ**.

β) i. Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΓΕ έχουμε:
$AE^2 = A\Gamma^2 - \Gamma E^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 \Leftrightarrow AE = \sqrt{64} = 8$

ii. Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΓΕΒ έχουμε:
$\text{ΒΕ}^2 = \text{ΒΓ}^2 - \text{ΓΕ}^2 = 8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28 \Leftrightarrow \text{ΒΕ} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$
Για την πλευρά ΑΒ έχουμε: $\text{ΑΒ} = \text{ΑΕ} + \text{ΕΒ} = 8 + 2\sqrt{7}$.

20644.Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι τραπέζιο με $\text{Α} = \text{Δ} = 90^\circ$,ΑΔ = 12, ΔΓ = 11, ΒΓ = 13 και ΓΕ το ύψος του.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΓΕ είναι ορθογώνιο. **(Μονάδες 8)**
β) Να αποδείξετε ότι ΕΒ = 5. **(Μονάδες 10)**
γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τραπεζίου. **(Μονάδες 7)**



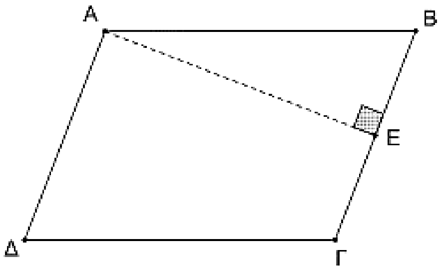
Λύση

α) Το ΓΕ είναι ύψος του τραπεζίου, άρα $\text{ΓΕΑ} = 90^\circ$.Το τετράπλευρο ΑΔΓΕ έχει τρεις γωνίες ορθές, συνεπώς είναι ορθογώνιο.

β) Επειδή το τετράπλευρο ΑΔΓΕ είναι ορθογώνιο έχουμε ότι ΓΕ = ΑΔ = 12 , ΑΕ = ΓΔ =11 και το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ορθογώνιο στο Ε, τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$\text{ΕΒ}^2 = \text{ΒΓ}^2 - \text{ΓΕ}^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25 \Leftrightarrow \text{ΕΒ} = \sqrt{25} = 5$

γ) Η πλευρά ΑΒ του τραπεζίου είναι ΑΒ = ΑΕ +ΕΒ = 11 + 5 = 16 , άρα η περίμετρος του Τ θα είναι:
Τ = ΑΒ +ΒΓ +ΓΔ + ΔΑ = 16 +13 +11 +12 = 52

20662.Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, Ε είναι το μέσο της πλευράς του ΒΓ και η ΑΕ είναι κάθετη στην ΒΓ. Αν ΑΒ = 13 και ΒΕ = 5, να βρείτε το μήκος:
α) της πλευράς ΑΔ του παραλληλογράμμου. **(Μονάδες 12)**
β) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΕ. **(Μονάδες 13)**



Λύση

α) Το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ και ΒΕ = 5, επομένως ΒΓ = 2ΒΕ = 2 · 5 = 10.
Οι απέναντι πλευρές ΑΔ, ΒΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι ίσες, άρα ΑΔ = 10.

β) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ. Είναι
$\text{ΑΕ}^2 = \text{ΑΒ}^2 - \text{ΒΕ}^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Leftrightarrow \text{ΑΕ} = \sqrt{144} = 12$

20841.Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μία κάθετη πλευρά του είναι μεγαλύτερη από την άλλη κατά 3 cm. Αν οι δύο κάθετες πλευρές έχουν άθροισμα 21 cm, τότε :
α) Να δείξετε ότι οι κάθετες πλευρές έχουν μήκη 9 cm και 12 cm. **(Μονάδες 10)**
β) Να υπολογίσετε την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) Το άθροισμα των κάθετων πλευρών του ορθογωνίου τριγώνου είναι 21 cm και επειδή η μία κάθετη πλευρά του είναι 3 cm μεγαλύτερη από την άλλη, αν αφαιρέσω 3 από το άθροισμά τους και διαιρέσω με το 2 θα προκύψει το διπλάσιο της μικρής. Έτσι η μικρή κάθετη θα είναι ίση με $\frac{21-3}{2} = \frac{18}{2} = 9\,\text{cm}$.
Οπότε η μεγαλύτερη κάθετη πλευρά είναι 9 + 3 = 12 cm.

β) Αν x είναι το μήκος της υποτείνουσας του ορθογωνίου τριγώνου, τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα θα έχουμε: $x^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 \Leftrightarrow x = \sqrt{225} = 15$.

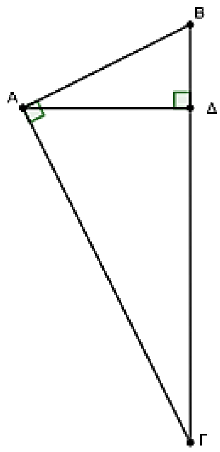
20842.Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ οι προβολές ΔΒ και ΔΓ των κάθετων πλευρών ΑΒ και ΑΓ στην υποτείνουσα ΒΓ έχουν μήκη 3 cm και 12 cm αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος του ύψους ΑΔ προς την υποτείνουσα ΒΓ είναι 6.

(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τις κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου.

(Μονάδες 16)



Λύση

α) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου προς την υποτείνουσα ΒΓ, τότε ΔΒ, ΔΓ είναι οι προβολές των κάθετων πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα προς την υποτείνουσα ΒΓ.
Ισχύει ότι $ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΓ = 3 \cdot 12 = 36 \Leftrightarrow ΑΔ = 6$.

β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε:
$ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΒΔ^2 = 6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45 \Leftrightarrow ΑΒ = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
Όμοια από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:
$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΓΔ^2 = 6^2 + 12^2 = 36 + 144 = 180 \Leftrightarrow ΑΒ = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$

20871. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα R = 3. Θεωρούμε το εφαπτόμενο τμήμα ΑΒ ώστε ΑΒ = 4, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε ότι η γωνία ΟΒΑ είναι ορθή.

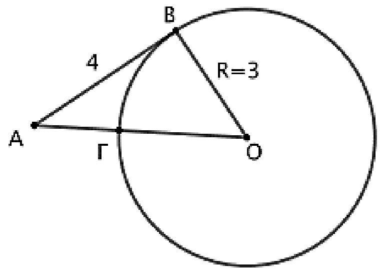
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι ΟΑ = 5.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΓ.

(Μονάδες 8)



Λύση

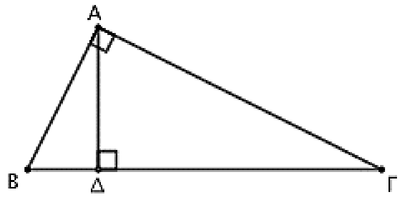
α) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι κάθετη στην ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής, οπότε ΑΒ ⊥ ΟΒ. Άρα, η γωνία ΟΒΑ είναι ορθή.

β) Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΑ έχουμε:
$ΟΑ^2 = ΑΒ^2 + 0Β^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Leftrightarrow ΟΑ = 5$

γ) Από το σχήμα έχουμε: ΑΓ = ΟΑ − ΟΓ = ΟΑ − R = 5 − 3 = 2

20873.Στο διπλανό σχήμα, το ΑΔ είναι το ύψος στην υποτείνουσα ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Αν είναι ΒΓ = 10 και ΔΓ = 8, τότε: α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΔ.
(Μονάδες 05)

β) Να αποδείξετε ότι ΑΔ = 4. **(Μονάδες 10)**
γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΒ.
(Μονάδες 10)



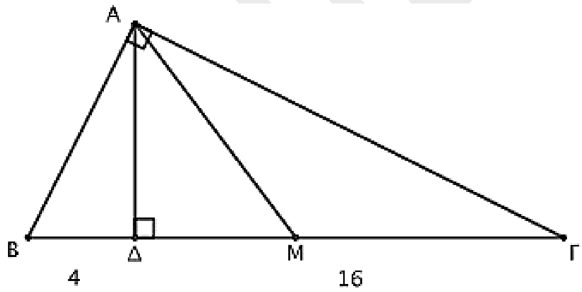
Λύση

α) Είναι: $B\Delta = B\Gamma - \Delta\Gamma = 10 - 8 = 2$

β) Για το ύψος ΑΔ στην υποτείνουσα ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ισχύει:
$A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma = 2 \cdot 8 = 16 \Leftrightarrow A\Delta = 4$

γ) Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:
$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 2 = 20 \Leftrightarrow AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

20876.Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(A = 90^\circ\right)$ του σχήματος, το ΑΔ είναι ύψος και το ΑΜ διάμεσος. Αν ΒΔ = 4 και ΔΓ = 16, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι:
i. ΑΔ = 8.
ii. $AB = 4\sqrt{5}$. **(Μονάδες 16)**
β) Να υπολογίσετε τη διάμεσο ΑΜ.
(Μονάδες 09)



Λύση

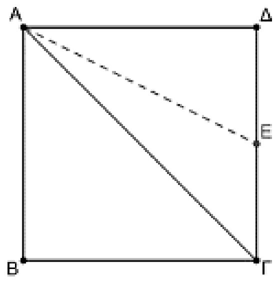
α) i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, το ύψος ΑΔ στην υποτείνουσα είναι:
$A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma = 4 \cdot 16 = 64 \Leftrightarrow A\Delta = 8$

ii. Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:
$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 = 8^2 + 4^2 = 64 + 16 = 80 \Leftrightarrow AB = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

β) Η διάμεσος ΑΜ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΒΓ, δηλαδή
$AM = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{4+16}{2} = \frac{20}{2} = 10$.

21064.Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2 και Ε είναι το μέσο της ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:
α) $A\Gamma = 2\sqrt{2}$.
(Μονάδες 12)

β) $AE = \sqrt{5}$.
(Μονάδες 13)

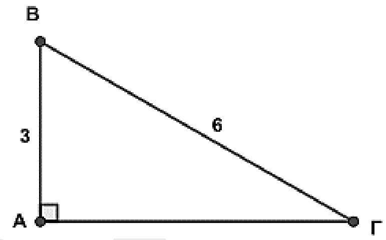


Λύση

α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ:
$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8 \Leftrightarrow A\Gamma = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

β) Αφού το Ε είναι μέσο της ΔΓ θα είναι $\Delta E = \frac{\Delta\Gamma}{2} = 1$.
Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ:
$AE^2 = A\Delta^2 + \Delta E^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5 \Leftrightarrow AE = \sqrt{5}$

21273.Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος η ΑΒ = 3 και η ΒΓ = 6. Να υπολογίσετε:
α) το μέτρο της γωνίας Γ.
(Μονάδες 13)
β) το μήκος της πλευράς ΑΓ.
(Μονάδες 12)

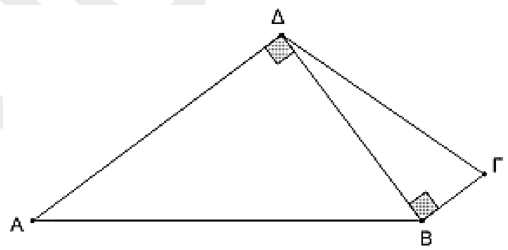


Λύση

α) Από τα δεδομένα του σχήματος η κάθετη πλευρά ΑΒ είναι η μισή της υποτείνουσας ΒΓ, οπότε η απέναντι οξεία γωνία Γ θα ισούται με 30^o.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27 \Leftrightarrow A\Gamma = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

22096.Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ορθογώνια με $A\Delta B = \Delta B\Gamma = 90^\circ$ και ΑΔ = 16, ΒΓ = 5 και ΓΔ = 13.
α) Να αποδείξετε ΒΔ = 12.
(Μονάδες 12)
β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΒ και την περίμετρο του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.
(Μονάδες 13)

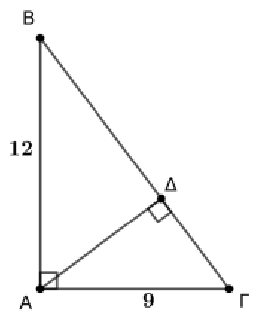


Λύση

α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ έχουμε ότι
$B\Delta^2 = \Gamma\Delta^2 - B\Gamma^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Leftrightarrow B\Delta = 12$.

β) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε ότι
$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400 \Leftrightarrow AB = 20$
Η περίμετρος του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ = 20 + 5 + 13 + 16 = 54.

20654.Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο $\left(A = 90^\circ\right)$ με κάθετες πλευρές ΑΒ = 12 και ΑΓ = 9, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι ΒΓ = 15.
(Μονάδες 12)
β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΔΓ.
(Μονάδες 13)

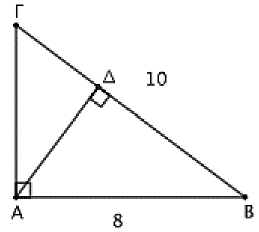


Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225 \Leftrightarrow B\Gamma = 15$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα, επομένως για την κάθετη πλευρά ΑΓ έχουμε: $ΑΓ^2 = ΓΔ \cdot ΒΓ \Leftrightarrow 9^2 = 15 \cdot ΓΔ \Leftrightarrow ΓΔ = \frac{81}{15} = \frac{27}{5} = 5,4$.

22240.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(Α = 90^\circ\right)$ με ΑΒ = 8 και ΒΓ = 10.



α) Να υπολογίσετε το μήκος της κάθετης πλευράς ΑΓ.
(Μονάδες 12)

β) Έστω ΑΔ το ύψος στην υποτείνουσα ΒΓ. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής ΔΒ της κάθετης πλευράς ΑΒ πάνω στη ΒΓ.
(Μονάδες 13)

Λύση

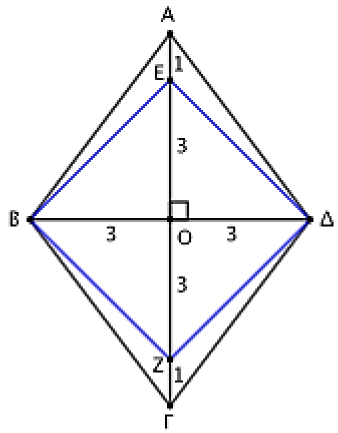
α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Έχουμε διαδοχικά:
$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 \Leftrightarrow ΑΓ^2 = ΒΓ^2 - ΑΒ^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \Leftrightarrow ΑΓ = 6$

β) Για την προβολή ΔΒ της κάθετης πλευράς ΑΒ πάνω στην υποτείνουσα ΒΓ έχουμε:
$ΑΒ^2 = ΔΒ \cdot ΒΓ \Leftrightarrow 8^2 = ΔΒ \cdot 10 \Leftrightarrow ΔΒ = \frac{64}{10} = 6,4$

4ο Θέμα

18352.Έστω Ο το κέντρο ρόμβου ΑΒΓΔ με μήκη διαγωνίων ΔΒ = 6 και ΑΓ = 8.
α) Να υπολογίσετε την πλευρά του ρόμβου. (Μονάδες 9)
β) Θεωρούμε σημεία Ε και Ζ εσωτερικά των τμημάτων ΟΑ και ΟΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΕΟ = ΟΖ.
i. Πόσο πρέπει να είναι το μήκος καθενός από τα τμήματα ΕΟ και ΟΖ ώστε το τετράπλευρο ΕΒΖΔ να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)
ii. Να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου ΕΒΖΔ του προηγούμενου ερωτήματος.
(Μονάδες 8)

Λύση

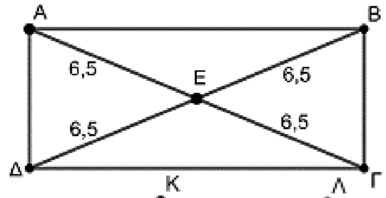


α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ.
Έχουμε διαδοχικά: $ΑΒ^2 = ΟΑ^2 + ΟΒ^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Leftrightarrow ΑΒ = 5$

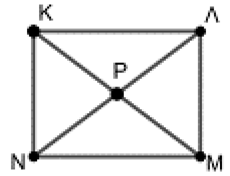
β) i. Για τα σημεία Ε και Ζ ισχύει ΕΟ = ΟΖ, οπότε οι διαγώνιοι ΒΔ και ΕΖ του τετράπλευρου ΕΒΖΔ διχοτομούνται στο Ο και τέμνονται κάθετα. Συνεπώς, το ΕΒΖΔ είναι τετράγωνο αν και μόνο αν ΕΖ = ΒΔ = 6, δηλαδή ΕΟ = ΟΖ = 3.

ii. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΕΒ.
Έχουμε διαδοχικά:
$ΕΒ^2 = ΟΕ^2 + ΟΒ^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18 \Leftrightarrow ΑΒ = \sqrt{18} = 2\sqrt{3}$.

19519.α) Το Ε είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.
Επιπλέον ισχύει ότι ΕΑ = ΕΓ = ΕΔ = ΕΒ = 6,5.
i. Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)
ii. Αν επιπλέον δίνεται ότι η πλευρά ΑΔ = 5, να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΒ του ΑΒΓΔ. (Μονάδες 10)



β) Μια ταμπέλα έχει το σχήμα του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Σας δίνεται ότι οι διαγώνιοι του ΚΜ και ΛΝ τέμνονται στο Ρ και έχει ΡΚ = ΡΛ = ΡΜ = 2,5.
Ένας συμμαθητής σας, ο Κώστας γνωρίζει επιπλέον το μήκος του ΡΝ και βγάζει, σωστά, το συμπέρασμα ότι η ταμπέλα είναι σχήματος ορθογωνίου. Πόσο είναι το μήκος του ΡΝ;



(Μονάδες 05)

Λύση

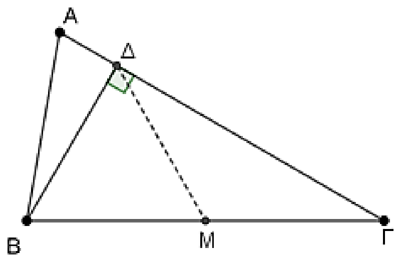
α) i. Το Ε είναι το μέσο των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, εφόσον από την υπόθεση έχουμε ότι ΑΕ = ΕΓ = 6,5 και ΒΕ = ΕΔ = 6,5. Άρα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Επιπλέον ΑΓ = ΑΕ + ΕΓ = 6,5 + 6,5 = 13 και ΒΔ = ΒΕ +ΕΔ = 6,5 + 6,5 = 13.
Άρα οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ είναι ίσες. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο με ίσες διαγωνίους, άρα είναι ορθογώνιο.

ii. Εφόσον το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο οι γωνίες του είναι ορθές. Άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο με $\hat{A}$ ορθή και υποτείνουσα ΒΔ. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ:

$$B\Delta^2 = A\Delta^2 + AB^2 \Leftrightarrow AB^2 = B\Delta^2 - A\Delta^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Leftrightarrow A\Delta = \sqrt{144} = 12$$

β) Το μήκος του ΡΝ είναι ίσο με 2,5. Ο Κώστας που το γνωρίζει εφαρμόζει αναλόγως το συμπέρασμα του α) i. Έτσι αποδεικνύει ότι το ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο, εφόσον ΡΚ = ΡΛ = ΡΜ = ΡΝ.

18160.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $B\Gamma = 8\sqrt{3}$, το ύψος του ΒΔ και το μέσο Μ της ΒΓ.
α) Να αποδείξετε ότι $\Delta M = 4\sqrt{3}$. (Μονάδες 07)
β) Αν $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και ΑΒ = 8:
i. Να υπολογίσετε την $M\hat{\Delta}\Gamma$. (Μονάδες 06)
ii. Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{B\Delta}{B\Gamma}$. (Μονάδες 06)
iii. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΔ. (Μονάδες 06)



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΓ, η ΔΜ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε ισούται με το μισό της, δηλαδή $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

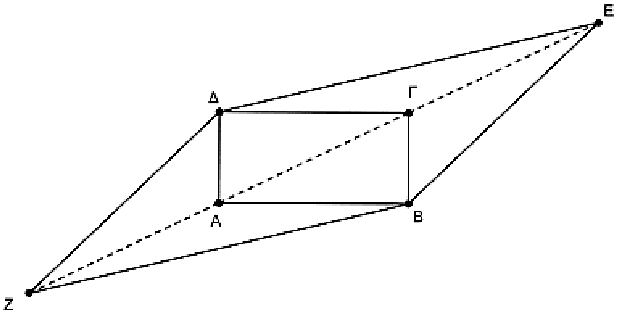
β) i. Είναι ΔΜ = ΜΓ, οπότε το τρίγωνο ΜΔΓ είναι ισοσκελές, άρα $\hat{\Gamma} = M\hat{\Delta}\Gamma = 30^\circ$.

ii. Το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΓ έχει τη γωνία $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ επομένως η απέναντι κάθετη πλευρά από την γωνία αυτή θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή: $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow \frac{B\Delta}{B\Gamma} = \frac{1}{2}$.

iii. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

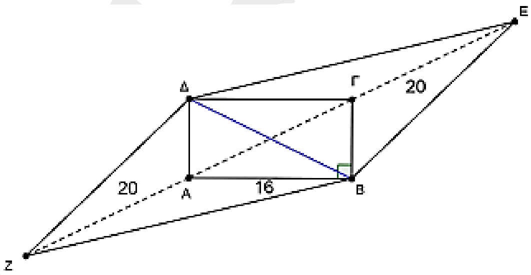
$$AB^2 = B\Delta^2 + A\Delta^2 \Leftrightarrow A\Delta^2 = AB^2 - B\Delta^2 = 8^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2 = 64 - 48 = 16 \Leftrightarrow A\Delta = \sqrt{16} = 4$$

19843. Στο σχήμα που ακολουθεί, το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο με διαγώνιο ΖΕ = 60 και το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με πλευρά ΑΒ =16.
Αν είναι ΖΑ = ΓΕ = 20, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι ΖΑ = ΑΓ = ΓΕ. **(Μονάδες 8)**
β) Να υπολογίσετε:
i. το μήκος της πλευράς ΒΓ και την περίμετρο του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, **(Μονάδες 10)**
ii. τη διαγώνιο ΔΒ του παραλληλογράμμου ΔΕΒΖ. **(Μονάδες 7)**
Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



Λύση

α) Είναι ΖΕ = ΖΑ + ΑΓ + ΓΕ με ΖΕ = 60 και ΖΑ = ΓΕ = 20, οπότε έχουμε 60 = 20 + ΑΓ + 20 $\Leftrightarrow$ $ΑΓ = 60 - 40 = 20$. Συνεπώς ΖΑ = ΑΓ = ΓΕ = 20.



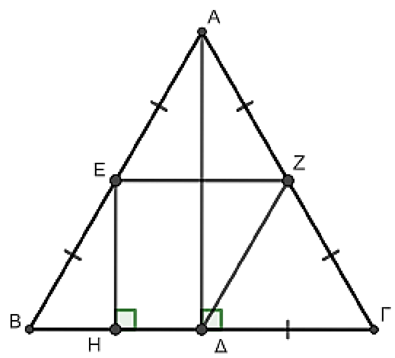
β) i. Αφού το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο θα έχει τις γωνίες του ορθές, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $Β = 90^\circ$. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 \Leftrightarrow ΒΓ^2 = ΑΓ^2 - ΑΒ^2 = 20^2 - 16^2 = 200 - 256 = 144 \Leftrightarrow ΒΓ = \sqrt{144} = 12$$

Αφού το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, άρα είναι και παραλληλόγραμμο, θα έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες δηλαδή ΑΔ = ΒΓ = 12 και ΔΓ = ΑΒ =16. Επομένως η περίμετρος Π του ΑΒΓΔ είναι: Π = 2ΑΒ +2ΒΓ = 2·16 + 2·12 ή Π = 56.

ii. Αφού το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, θα έχει ίσες τις διαγωνίους του, δηλαδή ΑΓ = ΔΒ με ΑΓ = 20 από το α) ερώτημα, άρα ΔΒ = 20 η οποία είναι διαγώνιος και του παραλληλογράμμου ΔΕΒΖ.

20849. Σε ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά 12, ΑΔ είναι το ύψος του και Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΕΗ είναι κάθετο στην πλευρά ΒΓ, με Η σημείο της ΒΓ, τότε :
α) Να αποδείξετε ότι :
i. ΕΖ//ΗΔ
ii. ΕΖ = 6 και ΗΔ = 3. **(Μονάδες 10)**
β) Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ΕΖΔΗ είναι παραλληλόγραμμο και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 7)**
γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΔΗ είναι τραπέζιο, του οποίου η βάση του ΕΖ είναι ίση με τη μία από τις μη παράλληλες πλευρές του τη ΔΖ. **(Μονάδες 8)**



Λύση

α) i. Το τμήμα ΕΖ ενώνει τα μέσα δυο πλευρών τριγώνου, άρα ΕΖ//ΒΓ, οπότε και ΕΖ//ΗΔ.

ii. Το τμήμα ΕΖ ενώνει τα μέσα δυο πλευρών τριγώνου, οπότε $ΕΖ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

Το ΑΔ είναι ύψος του ισόπλευρου τριγώνου προς την πλευρά ΒΓ, άρα είναι και διάμεσος. Οπότε ΒΔ=ΔΓ = 6. Επιπλέον, ΕΗ⊥ΒΓ και ΑΔ⊥ΒΓ , άρα ΕΗ//ΑΔ, ως κάθετες στη ίδια ευθεία ΒΓ σε διαφορετικά σημεία της. Στο τρίγωνο ΑΒΔ το Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ και ΕΗ//ΑΔ, άρα το Η είναι το μέσο της πλευράς ΒΔ. Οπότε $ΗΔ = ΗΒ = \frac{ΒΔ}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

β) Στο τετράπλευρο ΕΖΔΗ οι δύο απέναντι πλευρές του, οι ΕΖ και ΔΗ, είναι παράλληλες. Θα εξετάσουμε αν είναι παράλληλες και οι πλευρές ΕΗ και ΔΖ. Έχουμε ΕΗ//ΑΔ (από ερώτημα αii). Η ευθεία ΔΖ που είναι διαφορετική από την ΑΔ δεν μπορεί να είναι παράλληλη στην ΕΗ, γιατί από το σημείο Δ μόνο μια ευθεία παράλληλη προς την ΕΗ μπορούμε να φέρουμε. Έχουμε ήδη ΑΔ//ΕΗ, οπότε η ΔΖ δεν είναι παράλληλη στην ΕΗ. Το τετράπλευρο ΕΖΔΗ έχει μόνο ένα ζευγάρι παράλληλων πλευρών, άρα δεν είναι παραλληλόγραμμο. γ) Όπως αποδείχθηκε στο β) ερώτημα το τετράπλευρο ΕΖΔΗ έχει ένα ζευγάρι απέναντι πλευρών του παράλληλες και ένα ζευγάρι μη παράλληλες, οπότε το τετράπλευρο ΕΖΔΕ είναι τραπέζιο. Από το ερώτημα αii) έχουμε $ΕΖ = \frac{ΒΓ}{2} = 6$.

Για το τμήμα ΔΖ έχουμε ότι $ΔΖ = \frac{ΑΓ}{2} = 6$, ως διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου προς την υποτείνουσα.

Άρα στο τραπέζιο ΕΖΔΗ ισχύει ΕΖ = ΔΖ = 6.

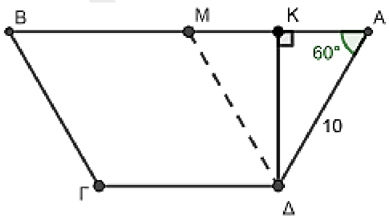
20850.Στο διπλανό σχήμα το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές και η μεγάλη βάση του ΑΒ είναι διπλάσια από την πλευρά ΑΔ. Επιπλέον η γωνία Α είναι 60° και η πλευρά ΑΔ είναι 10 cm.

α) Να υπολογίσετε το ύψος ΔΚ του τραπεζίου. (Μονάδες 10)

β) Αν Μ είναι το μέσο της ΑΒ να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΔΜΑ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 05)

ii. Το τετράπλευρο ΔΜΒΓ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΚΑ η μία οξεία γωνία του είναι 60° , άρα $ΑΔΚ = 30^\circ$, οπότε η κάθετη πλευρά που είναι απέναντι από τη γωνία των 30° θα είναι μισή από την υποτείνουσα. Δηλαδή $ΚΑ = \frac{ΑΔ}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΔΚΑ έχουμε :

$ΔΚ^2 = ΑΔ^2 - ΑΚ^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75 \Leftrightarrow ΔΒ = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

β) i. Έστω Μ το μέσο της βάσης ΑΒ, τότε $ΑΜ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{2ΑΔ}{2} = ΑΔ = 10$.

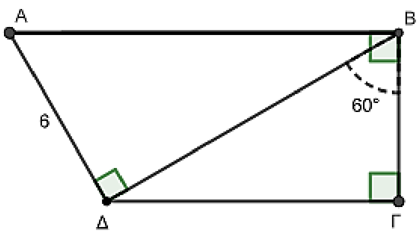
Το τρίγωνο ΔΜΑ είναι ισοσκελές με γωνία της κορυφής $Α = 60^\circ$, άρα το τρίγωνο ΔΜΑ είναι ισόπλευρο με ΔΜ = 10 και $ΔΜΑ = 60^\circ$.

ii. Στο τετράπλευρο ΔΜΒΓ οι πλευρές ΔΜ και ΒΓ είναι ίσες αφού ΒΓ = ΑΔ = 10 (ισοσκελές τραπέζιο) και ΔΜ = 10. Επιπλέον $Β = Α = 60^\circ$ (ως προσκείμενες στη βάση ΑΒ του ισοσκελούς τραπεζίου) και $ΔΜΑ = 60^\circ$, οπότε ΔΜ//ΒΓ αφού σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες όταν τέμνονται από την ΒΜ. Δηλαδή ΔΜ//ΒΓ και ΔΜ = ΒΓ οπότε το τετράπλευρο ΔΜΒΓ είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον ΔΜ = ΜΒ = 10, οπότε το παραλληλόγραμμο ΔΜΒΓ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, επομένως είναι ρόμβος.

20852.Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος με ΑΒ//ΓΔ, είναι $Β = Γ = 90^\circ$.Η πλευρά ΑΔ είναι 6 και η διαγώνιος ΒΔ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΔ και σχηματίζει με την πλευρά ΒΓ γωνία $ΔΒΓ = 60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι η βάση ΑΒ του τραπεζίου είναι 12. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τη διαγώνιο ΒΔ. (Μονάδες 7)



γ) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι $27 + 3\sqrt{3}$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Δίνεται ότι $B = 90^\circ$ και $\Delta B \Gamma = 60^\circ$, άρα $\Delta BA = 30^\circ$.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ η πλευρά ΑΔ βρίσκεται απέναντι από γωνία 30^o, οπότε ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΑΒ. Άρα $A\Delta = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow AB = 2A\Delta = 12$.

β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε
$\Delta B^2 = AB^2 - A\Delta^2 = 12^2 - 6^2 = 144 - 36 = 108 \Leftrightarrow \Delta B = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΒ δίνεται ότι $\Delta B\Gamma = 60^\circ$, άρα η άλλη οξεία γωνία του τριγώνου ισούται με 30^o, δηλαδή $B\Delta\Gamma = 30^\circ$. Η πλευρά ΒΓ βρίσκεται απέναντι από γωνία 30^o στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΓ, άρα $B\Gamma = \frac{B\Delta}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΔΒΓ έχουμε
$\Delta\Gamma^2 = \Delta B^2 - B\Gamma^2 = 108 - \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 108 - 27 = 81 \Leftrightarrow \Delta\Gamma = \sqrt{81} = 9$.

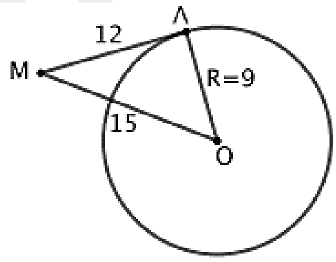
Η περίμετρος του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι ίση με ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΑΔ $= 12 + 3\sqrt{3} + 9 + 6 = 27 + 3\sqrt{3}$.

20877.α) Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(A = 90^\circ\right)$ είναι ΑΒ = 12 και ΒΓ = 15. Να υπολογίσετε την κάθετη πλευρά ΑΓ.

(Μονάδες 12)

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι στο σχήμα, «το ΜΛ είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (Ο,R) στο σημείο του Λ». Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του μαθητή είναι αληθής και να τεκμηριώσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Έχουμε διαδοχικά:
$A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81 \Leftrightarrow A\Gamma = 9$

β) Το τρίγωνο ΜΛΟ έχει πλευρές ΟΜ = 15, ΛΜ = 12, ΟΛ = 9. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι το τρίγωνο με μήκη πλευρών 15, 12 και 9 είναι ορθογώνιο, δηλαδή οι αριθμοί 15, 12 και 9 αποτελούν πυθαγόρεια τριάδα. Επομένως, το τρίγωνο ΜΛΟ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά ΟΜ = 15 και $O\Lambda M = 90^\circ$. Αφού το τμήμα ΜΛ είναι κάθετο στην ακτίνα ΟΛ στο σημείο του Λ, συμπεραίνουμε ότι το ΜΛ είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (Ο,R) στο σημείο του Λ. Συνεπώς, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι αληθής.

22097.Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ορθογώνια με $AB\Delta = B\Delta\Gamma = 90^\circ$ και ΑΒ = 9, ΒΔ = 8 και ΓΔ = 6.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΓ.

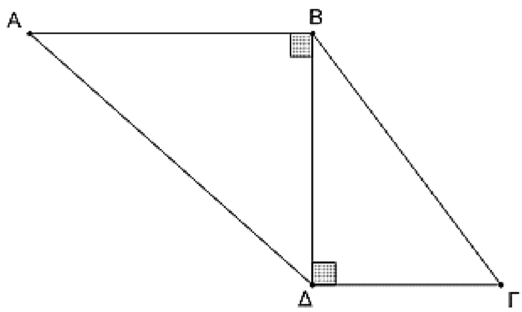
(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε $A\Delta = \sqrt{145}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ΑΓ = 17.

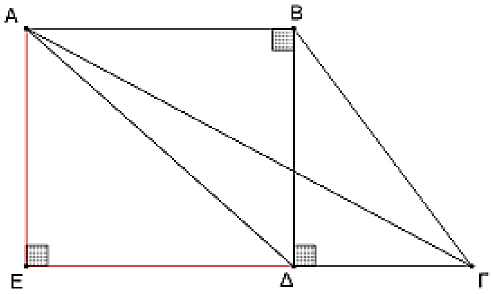
(Μονάδες 7)



Λύση

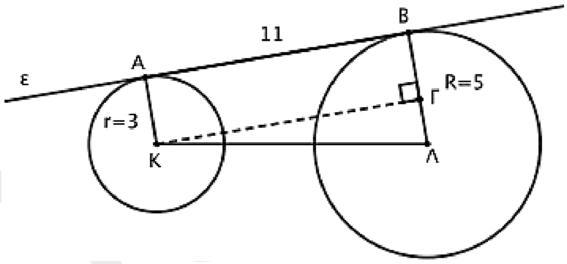
α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ έχουμε ότι
$B\Gamma^2 = B\Delta^2 + \Gamma\Delta^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 \Leftrightarrow B\Gamma = 10$

β) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε ότι
$A\Delta^2 = AB^2 + B\Delta^2 = 9^2 + 8^2 = 81 + 64 = 145 \Leftrightarrow A\Delta = \sqrt{145}$



γ) Φέρουμε την κάθετη από το σημείο Α προς τη ΓΔ, η οποία τέμνει την προέκταση της ΓΔ στο σημείο Ε.
Το τετράπλευρο ΑΒΔΕ είναι ορθογώνιο, αφού έχει τρεις ορθές γωνίες. Επομένως ΑΒ = ΔΕ = 9 και ΑΕ = ΒΔ = 8 ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΑΒΔΕ.
Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΕ έχουμε ότι
$A\Gamma^2 = AE^2 + E\Gamma^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 \Leftrightarrow$
$A\Gamma = \sqrt{289} = 17$

22203.Μια ευθεία ε εφάπτεται στους κύκλους (Κ, r) και (Λ,R) στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν r = 3, R = 5, AB = 11 και ΚΓ ⊥ ΒΛ , τότε:



α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΚ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)
β) Να υπολογίσετε:
i. Τα μήκη των τμημάτων ΚΓ και ΓΛ. (Μονάδες 8)
ii. Την απόσταση των κέντρων Κ και Λ. (Μονάδες 6)
γ) Τι είδους τετράπλευρο θα είναι το ΑΒΛΚ όταν οι κύκλοι έχουν ίσες ακτίνες; (Μονάδες 5)

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι κάθετη στην ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής. Οπότε, ΑΒ ⊥ ΑΚ και ΑΒ ⊥ ΒΛ. Άρα, οι γωνίες $\widehat{KAB}$ και $\widehat{\Lambda BA}$ είναι ορθές.

Επίσης, από τα δεδομένα της άσκησης, δίνεται ότι ΚΓ ⊥ ΒΛ, οπότε η γωνία $\widehat{K\Gamma B}$ είναι ορθή.
Επομένως, το τετράπλευρο ΑΒΓΚ είναι ορθογώνιο, αφού έχει τρεις γωνίες ορθές.

β) i. Το τετράπλευρο ΑΒΓΚ είναι ορθογώνιο, οπότε έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.
Άρα, ΚΓ = ΑΒ = 11 και ΒΓ = ΑΚ = 3.
Για το τμήμα ΓΛ έχουμε: ΓΛ = ΒΛ − ΒΓ = 5 − 3 = 2

ii. Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΓΛ έχουμε:
$K\Lambda^2 = K\Gamma^2 + \Gamma\Lambda^2 = 11^2 + 2^2 = 121 + 4 = 125 \Leftrightarrow K\Lambda = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

γ) Όταν οι κύκλοι έχουν ίσες ακτίνες θα είναι ΑΚ = ΒΛ. Επίσης, είναι ΑΚ ∥ ΒΛ, αφού τα τμήματα ΑΚ και ΒΛ είναι κάθετα στην ΑΒ. Επομένως, το τετράπλευρο ΑΒΛΚ θα είναι ορθογώνιο, αφού είναι παραλληλόγραμμο και η γωνία του $\widehat{KAB}$ είναι ορθή.

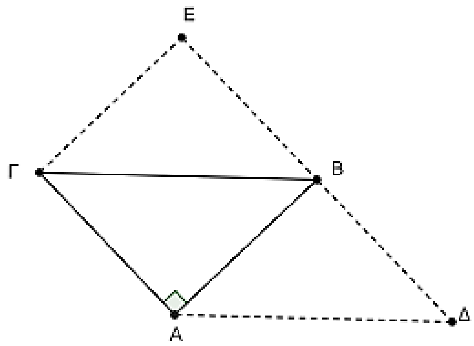
22245.Στο σχήμα που ακολουθεί, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $A = 90^\circ$, ΑΒ = ΑΓ = 14 και Β σημείο του τμήματος ΔΕ. Αν είναι ΑΔ // ΓΒ, ΑΒ // ΓΕ και ΑΓ // ΔΕ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι

i. το τετράπλευρο ΑΓΒΔ είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 8)

ii. το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ είναι ίση με $28\left(\sqrt{2}+1\right)$. (Μονάδες 8)



Λύση

α) i. Έχουμε ότι ΑΓ // ΔΕ (από τα δεδομένα), άρα ΑΓ // ΔΒ. Επίσης είναι ΑΔ // ΒΓ από τα δεδομένα, άρα το τετράπλευρο ΑΓΒΔ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

ii. Από τα δεδομένα έχουμε ότι ΑΓ // ΔΕ, άρα και ΑΓ //ΒΕ (1). Επίσης έχουμε ότι ΑΒ // ΓΕ (2).
Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.
Το παραλληλόγραμμο ΑΓΕΒ έχει δυο διαδοχικές πλευρές ίσες, τις ΑΒ και ΑΓ από τα δεδομένα, και μια γωνία ορθή, την $A = 90^\circ$ επίσης από τα δεδομένα. Άρα το ΑΓΕΒ είναι τετράγωνο.

β) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές τις ΑΒ και ΑΓ και υποτείνουσα τη ΒΓ. Οπότε, εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα, έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 14^2 + 14^2 = 2\cdot 14^2 \Leftrightarrow B\Gamma = \sqrt{2\cdot 14^2} = 14\sqrt{2}$$

Το τετράπλευρο ΑΓΒΔ είναι παραλληλόγραμμο, άρα οι απέναντι πλευρές του θα είναι ίσες, δηλαδή ΑΓ = ΔΒ και ΑΔ = ΓΒ. Η περίμετρος Π το τετραπλεύρου ΑΓΒΔ είναι:

$$\Pi = A\Gamma + \Gamma B + B\Delta + \Delta A = 2A\Gamma + 2\Gamma B = 2\cdot 14 + 2\cdot 14\sqrt{2} = 28\left(\sqrt{2}+1\right)$$

3ο Θέμα

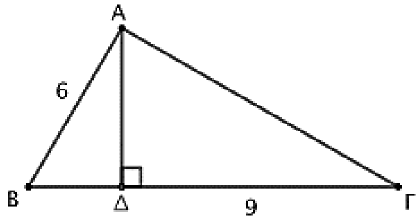
21151.Στο παρακάτω σχήμα, το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ. Αν είναι ΑΒ = 6, ΒΓ = 12 και ΔΓ = 9, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΑΔ = \sqrt{27}$. (Μονάδες 08)

ii. $ΑΓ = \sqrt{108}$. (Μονάδες 08)

β) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.



(Μονάδες 09)

Λύση

α) i. Είναι: ΒΔ = ΒΓ − ΔΓ = 12 − 9 = 3

Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$ΑΔ^2 = ΑΒ^2 - ΒΔ^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27 \Leftrightarrow ΑΔ = \sqrt{27}$

ii. Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2 = \left(\sqrt{27}\right)^2 + 9^2 = 27 + 81 = 108 \Leftrightarrow ΑΓ = \sqrt{108}$

β) Εξετάζουμε αν εφαρμόζεται το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΒΓ. Είναι:

$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 6^2 + \left(\sqrt{108}\right)^2 = 36 + 108 = 144$ και $ΒΓ^2 = 12^2 = 144$, άρα $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2$, οπότε το

τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $Α = 90^\circ$.

Γενίκευση πυθαγορείου θεωρήματος

2ο Θέμα

22110.Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 5, ΒΓ =5 και ΑΓ = 7.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΒΑΓ του τριγώνου είναι οξεία. (Μονάδες 9)
β) Να απαντήσετε στα επόμενα ερωτήματα αιτιολογώντας την απάντησή σας.
i. Να χαρακτηρίσετε τις άλλες δύο γωνίες του τριγώνου ως οξεία ή αμβλεία. (Μονάδες 10)
ii. Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές και τις γωνίες του. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Είναι $B\Gamma^2 = 5^2 = 25$ και $AB^2 + A\Gamma^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$, άρα $B\Gamma^2 < AB^2 + A\Gamma^2$ επομένως η γωνία ΒΑΓ είναι οξεία.

β) i.Είναι $A\Gamma^2 = 7^2 = 49$ και $AB^2 + B\Gamma^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$, άρα $A\Gamma^2 < AB^2 + B\Gamma^2$ επομένως η γωνία ΑΒΓ είναι οξεία.

Είναι $AB^2 = 5^2 = 25$ και $A\Gamma^2 + B\Gamma^2 = 7^2 + 5^2 = 49 + 25 = 74$, άρα $AB^2 < A\Gamma^2 + B\Gamma^2$ επομένως η γωνία ΑΓΒ είναι οξεία.

ii. Από τα προηγούμενα ερωτήματα έχουμε ότι και οι τρεις γωνίες του τριγώνου είναι οξείες, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ θα είναι οξυγώνιο. Όμως από τα δεδομένα έχουμε ότι ΑΒ = ΒΓ = 5, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ θα είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΑΓ. Συνεπώς το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο και ισοσκελές.

22111.Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ =6, ΑΓ =6 και ΒΓ = 9.

α) Να δείξετε ότι η γωνία ΑΒΓ του τριγώνου είναι οξεία. (Μονάδες 9)
β) Να απαντήσετε στα επόμενα ερωτήματα αιτιολογώντας την απάντησή σας.
i. Να χαρακτηρίσετε τη γωνία $B\hat{A}\Gamma$ του τριγώνου, ως οξεία ή αμβλεία. (Μονάδες 10)
ii. Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές και τις γωνίες του. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Είναι $A\Gamma^2 = 6^2 = 36$ και $AB^2 + B\Gamma^2 = 6^2 + 9^2 = 36 + 81 = 117$, άρα $A\Gamma^2 < AB^2 + B\Gamma^2$ επομένως η γωνία ΑΒΓ είναι οξεία.

β) Είναι $B\Gamma^2 = 9^2 = 81$ και $AB^2 + A\Gamma^2 = 6^2 + 6^2 = 36 + 36 = 72$, άρα $B\Gamma^2 > AB^2 + A\Gamma^2$ επομένως η γωνία ΒΑΓ είναι αμβλεία.

γ) Από τα προηγούμενα ερωτήματα έχουμε ότι το τρίγωνο έχει μια αμβλεία γωνία, την ΒΑΓ άρα θα είναι αμβλυγώνιο. Όμως από τα δεδομένα έχουμε ότι ΑΒ = ΑΓ = 6, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ θα είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΒΓ. Συνεπώς το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο και ισοσκελές.

4ο Θέμα

18172.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$, ΑΓ = 12 και ΑΒ = 5.

α) Να αποδείξετε ότι ΒΓ = 13.

(Μονάδες 08)

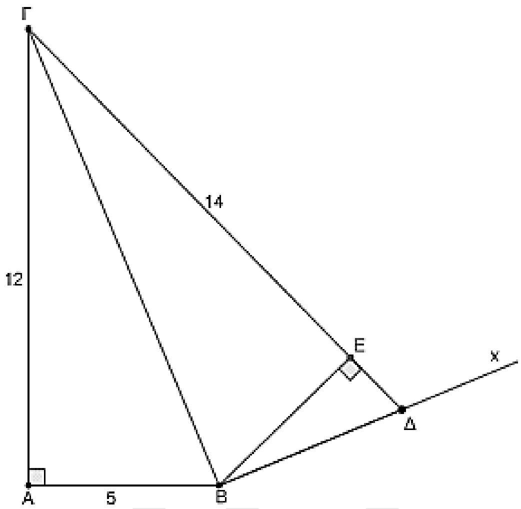
β) Φέρουμε ημιευθεία Βx κάθετη στην ΒΓ στο σημείο Β και παίρνουμε στην Βx σημείο Δ , τέτοιο ώστε ΓΔ = 14, όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι $B\Delta = 3\sqrt{3}$.

(Μονάδες 08)

ii. Να υπολογίστε την προβολή της ΒΔ στην ΔΓ.

(Μονάδες 09)



Λύση

α) Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ: $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 \Leftrightarrow B\Gamma = 13$.

β) Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΒΔΓ:

$B\Delta^2 = \Delta\Gamma^2 - B\Gamma^2 = 14^2 - 13^2 = 196 - 169 = 27 \Leftrightarrow B\Delta = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

γ) Φέρνουμε ΒΕ κάθετη στην ΓΔ, οπότε η προβολή του ΒΔ στην ΔΓ είναι η ΔΕ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΒΔ ισχύει ότι $B\Delta^2 = \Delta E \cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow \left(3\sqrt{3}\right)^2 = \Delta E \cdot 14 \Leftrightarrow \Delta E = \dfrac{27}{14}$.